

國立彰化師範大學光電科技研究所

碩士論文

指導教授：郭艷光教授

以 Matlab 分析

紅寶石雷射使用 Cr:YSO 和 Dy:CaF₂ 可飽和吸收體的光學特性與 Nd:YAG 雷射使用 Cr:YAG 的雙雷射特性

Analysis of Cr:YSO and Dy:CaF₂ Q-switched Ruby laser
and dual Q-switching characteristics of
Nd:YAG-Cr:YAG laser by using Matlab

研究生：吳育驊 撰

中華民國九十四年

國立彰化師範大學光電科技研究所

碩士論文

研究生：吳育驊

以 Matlab 分析

紅寶石雷射使用 Cr:YSO 和 Dy:CaF₂ 可飽和吸收體的光學特性與 Nd:YAG 雷射使用 Cr:YAG 的雙雷射特性

本論文業經審查及口試合格特此證明

論文考試委員會主席_____

委員：_____

指導教授：郭艷光博士_____

所 長：吳仲卿主任_____

中華民國九十四年六月

國立彰化師範大學

博碩士論文電子檔案上網授權書

(提供授權人裝釘於紙本論文審定頁之次頁用)

本授權書所授權之論文為授權人在 國立彰化師範 大學 光電科技 研究所
93 學年度第 二 學期取得 碩 士學位之論文。

論文題目：以 Matlab 分析紅寶石雷射使用 Cr:YSO 和 Dy:CaF₂ 可飽和吸收體的
光學特性與 Nd:YAG 雷射使用 Cr:YAG 的雙雷射特性

指導教授：郭艷光 教授

茲 同意將授權人擁有著作權之上列論文全文(含摘要), 授權本校圖書館及國
家圖書館, 以電子檔上載網路等數位化方式, 提供讀者基於個人非營利性質之線
上檢索、閱覽、下載或列印。

論文電子全文上載網路公開時間：

一、校內區域網路：

- 立刻公開 1 年後公開 2 年後公開 3 年後公開
 4 年後公開 5 年後公開 不公開

二、校外網際網路：

- 立刻公開 1 年後公開 2 年後公開 3 年後公開
 4 年後公開 5 年後公開 不公開

指導教授：郭艷光 教授

研究生(授權人)簽名：吳育驊

(請親筆正楷簽名)

學 號：91252007

中 華 民 國 94 年 07 月 08 日

誌 謝

我的碩士生涯當中，所遇到的人，發生的事，學到的知識技能，比我原本想像中的還多。這就是人生中最需要學習的東西，並不是一切都是可控制的參數，因為人類的領域終究還是太渺小。所以，科學的真理需要大膽的假設，然後小心的求證。回想這些日子，從大學畢業前，就進到郭艷光老師的實驗室，認識了張誌原學長、張郁妮學姊和林文偉學長，還有當時碩一的張詒安學長與張志康學長。所有的學長姐都很熱心的，讓我與其他同學熟悉這個環境，漸漸的了解研究生的生活。研究所生涯的第一個暑假，在郭老師的帶領下，開始一百多個小時的基本訓練，相信有參加 group meeting 的人都很難忘懷吧。之後我選擇了固態雷射的研究方向，當時的想法是想要學習 Matlab 這套模擬軟體，並且想要加強程式的練習。在這個領域上，很感謝之前的陳鴻銘學長、張詒安學長與張誌原學長。雖然我跟鴻銘學長只見過兩次面，但還是受益良多。從鴻銘學長所寫的程式裡，幫助我了解固態雷射與 Matlab 的學習。除此之外，實驗室裡的生活，大家互相幫忙與互相鼓勵。學長姐們前途似錦，而同實驗室的同學顏勝宏、蔡孟倫與林正洋，也都在老師的指導下能夠考上博士班與國防役。朱漢義與我除了在實驗室裡的生活外，也一同修習教育學程。實驗室的學弟學妹們，陳秀芬、謝尚衛、吳佩璇、屠嫻琳與楊勝州也是個個都一

表人才與秀外慧中。還有郭力偉等，求學中有很多的歡笑與甘苦也跟他們一起過。

實驗室裡也有新的傳承，陳俊榮與張永政兩個學弟可以說是實驗室裡新的棟樑，很高興能有與他們相處的機會。還有可愛又有才華，大學部裡的學弟妹們，柏君、政鴻、少甫、清白、志力、銘偉、紀孝、宗宏等。在我這段求學的過程中，有修課的老師和實驗室的師長，實驗室裡一起參加 group meeting 的劉柏挺老師與陳美玲老師，讓我獲益良多。當然，郭艷光老師應該是最該感謝的老師。我對實驗室的貢獻不多，跟學長與同學們比起來其實很慚愧，不過也很感謝老師的教導與包容。

實驗室之外，感謝非常多關心我的家人與朋友。特別感謝我的父母與爺爺奶奶，這段時間有你們這支持與鼓勵。

目 錄

目錄	I
中文摘要	III
英文摘要	V
圖表索引	VII
第一章 固態雷射使用可飽和吸收體的簡介	1
1.1 前言	1
參考文獻	9
第二章 Matlab 與數值模擬的簡介	13
2.1 前言	13
2.2 數值模擬的簡介	15
2.3 Matlab 的簡介	20
2.4 使用 Matlab 做數值分析	35
參考文獻	49

第三章	紅寶石雷射使用 Cr:YSO 與 Dy:CaF ₂ 晶體之數值分析 ...	50
3.1	前言	50
3.2	紅寶石與各種固態晶體介紹	51
3.3	紅寶石使用被動 Q 開關做脈衝雷射的數值分析	53
	參考文獻	72
第四章	雙雷射系統的數值分析	75
4.1	前言	75
4.2	Nd:YAG-Cr:YAG 雙雷射系統分析	76
4.3	Nd:YAG-Cr:YAG 雙雷射系統的變溫模擬分析	85
	參考文獻	97
第五章	結論	98
附錄 A	Matlab 程式	i
	A-1	i
	A-2	xi

中文摘要

固態雷射與可飽和吸收體並不是一個新的知識領域，不過它卻包含了雷射重要的原理，沿用至今日的半導體雷射與高功率固態雷射。紅寶石雷射是人類發明的第一個雷射，經由它科學家證明了愛因斯坦的受激輻射理論。在各種科學與工業的應用方面，紅寶石雷射至今已經被半導體雷射與其他固態雷射所取代。不過在美容醫學或是理論研究方面，還是可以看到紅寶石雷射的用途。

數值模擬是各種重要研究的參考依據，它結合了物理的理論與邏輯的運用。不管是天文、氣象、生物繁衍、原子分裂與融合、半導體雷射與高功率固態雷射等等，都需要數值模擬當作參考。但是實際上我們無法完美的掌握所有的變數，所以在做所有的數值模擬的時候，都需要與實驗相輔相成。也就是模擬的結果可以當作實驗的依據，然後得到實驗結果後與當初模擬的條件相比對，修正模擬的缺點或錯誤。然後進行下一次的模擬，重複這樣的步驟。在這個過程中，我們可以發現許多我們想要研究的資訊。

電腦的發展快速，讓數值模擬的研究很蓬勃的發展。各式各樣的數學工具也因應而生。例如，結合程式語言與數學工具的軟體 Matlab。本篇論文主要使用 Matlab 程式，依據固態可飽和吸收體當作雷射晶棒的被動 Q 開關的脈衝雷射理論撰寫程式。然後以數值模擬的角度，完整分析紅寶石雷射使用 Cr:YSO 與 Dy:CaF₂ 可飽和吸收體

的脈衝雷射特性，還有分析 Nd:YAG 雷射使用 Cr:YAG 固態可飽和吸收體的雙雷射脈衝現象。

ABSTRACT

Solid-state lasers and solid-state saturable absorbers have been extensively studied. However, there are still a lot of important characteristics of solid-state lasers and solid-state saturable absorbers, which have applications in semiconductor lasers and high power solid-state lasers, to be investigated. The ruby laser studied in this thesis is the first laser in this world, with which the concept of excited emission proposed by Albert Einstein was verified. Today, for many scientific and industrial applications, the solid-state lasers have been replaced by semiconductor lasers and other solid-state lasers. Nevertheless, ruby laser still finds applications in such fields as cosmetic surgery or research of laser theorem.

Numerical analysis can be used as a tool of verification for various researches. It is in concert with physics theorems and logical operation in astronomy, meteorology, propagation of organism, nuclear fission, nuclear fusion, semiconductor lasers and Q-switched solid-state lasers. In fact, we can not control perfectly every parameter that we know or we don't know. So we must combine and compare the results of numerical analysis and experiments. In other words, results of our numerical analysis can be an index for our experiments. When we get the

experimental results, we can use these results to make comparison and reform the parameters which are used in numerical analysis. We do it step by step until the result is satisfactory. A lot of information can be obtained in this process.

Due to the fact that the speed and capacity of personal computers have been vastly improved in the past few years, the quality of numerical analysis is markedly enhanced. Many kinds of mathematical softwares have been developed in the past few years. For example, Matlab, which combines program language and calculation tool boxes, is a very powerful mathematical tool for numerical analysis. This thesis focuses on simulation of Dy:CaF₂ and Cr:YSO Q-switched ruby laser and dual Q-switching and laser action of Nd:YAG-Cr:YAG laser system by using Matlab to solve the coupled differential rate equations.

圖表索引

圖 1.1	介於雷射上能階與下能階之間的居量反轉數。	1
圖 1.2	Q 開關雷射產生步驟分解	2
圖 1.3	使用 p -InGaN 當成可飽和吸收層(SA, saturable absorber layer)。	6
圖 1.4	可飽和吸收體的摻鉬光纖的光源示意圖。	8
圖 3.1	模擬厚度 8 與 15 mm 的 Dy:CaF ₂ 被動 Q 開關可飽和吸收體脈衝雷射的輸出能量。	56
圖 3.2	模擬厚度 8 與 15 mm 的 Dy:CaF ₂ 被動 Q 開關可飽和吸收體脈衝雷射的脈衝寬度。	56
圖 3.3	當可飽和吸收體 Dy:CaF ₂ 基態粒子數初始值 $N_{a0} = 3.86 \times 10^{15}$, 平面耦合輸出鏡反射率使用 78%, $R_p = 1.2 \times 10^{21} \text{ s}^{-1}$ 時, 時間對 N_g , $Loss$ 和 n 關係圖。	57
圖 3.4	這是圖 3.3 在第一個雷射脈衝附近的放大圖。	58
圖 3.5	當可飽和吸收體 Cr:YSO 基態粒子數初始值 $N_{a0} = 3.86 \times 10^{15}$, 平面耦合輸出鏡反射率使用 78%, $R_p = 1.2 \times 10^{21} \text{ s}^{-1}$ 時, 時間對 N_g , $Loss$ 和 n 函數第一個雷射脈衝附近的放大圖	59
圖 3.6	Cr:YSO 與 Dy:CaF ₂ 兩種可飽和吸收體使用紅寶石晶體的被動 Q 開關雷射的第一個雷射脈衝能量的比較圖	60

- 圖 3.7 當可飽和吸收體 Dy:CaF₂ 平面耦合輸出鏡反射率使用 78% ,
 $R_p = 1.2 \times 10^{21} \text{ s}^{-1}$ 時 , N_{a0} 對輸出能量與脈衝寬度的圖形。 ... 61
- 圖 3.8 當可飽和吸收體 Dy:CaF₂ 平面耦合輸出鏡反射率使用 78% ,
 $R_p = 1.2 \times 10^{21} \text{ s}^{-1}$ 時 , N_{a0} 對第一個雷射脈衝與第二個雷射脈
衝出現時間的圖形。 62
- 圖 3.9 當可飽和吸收體 Dy:CaF₂ 使用 $N_{a0} = 3.86 \times 10^{15}$, $R_p = 1.2 \times 10^{21}$
 s^{-1} 時 , 平面耦合輸出鏡反射率 R 對輸出能量與脈衝寬度的
圖形。 63
- 圖 3.10 當可飽和吸收體 Dy:CaF₂ 平面耦合輸出鏡反射率使用 78% ,
 $N_{a0} = 3.86 \times 10^{15}$ 時 , R_p 對輸出能量與脈衝寬度的圖形。 ...63
- 圖 3.11 當可飽和吸收體 Dy:CaF₂ 平面耦合輸出鏡反射率使用 78% ,
 $N_{a0} = 3.86 \times 10^{15}$ 時 , R_p 對第一個雷射脈衝與第二個雷射脈衝
出現時間的圖形。 64
- 圖 3.12 當可飽和吸收體 Cr:YSO 平面耦合輸出鏡反射率使用 78% ,
 $R_p = 1.2 \times 10^{21} \text{ s}^{-1}$ 時 , N_{a0} 對輸出能量與脈衝寬度的圖形。 ... 65
- 圖 3.13 當可飽和吸收體 Cr:YSO 與 Dy:CaF₂ 平面耦合輸出鏡反射率
使用 78% , $R_p = 1.2 \times 10^{21} \text{ s}^{-1}$ 時 , N_{a0} 對第一個雷射脈衝出現
時間的比較圖形。 66
- 圖 3.14 當可飽和吸收體 Cr:YSO 使用 $N_{a0} = 3.86 \times 10^{15}$, $R_p = 1.2 \times 10^{21}$
 s^{-1} 時 , 平面耦合輸出鏡反射率 R 對輸出能量與脈衝寬度的
圖形。 66

圖 3.15	當可飽和吸收體 Cr:YSO 平面耦合輸出鏡反射率使用 78% , $N_{a0} = 3.86 \times 10^{15}$ 時, R_p 對輸出能量與脈衝寬度的圖形。	67
圖 3.16	當可飽和吸收體 Cr:YSO 與 Dy:CaF ₂ 平面耦合輸出鏡反射率 使用 78% , $N_{a0} = 3.86 \times 10^{15}$ 時 , R_p 對第一個雷射脈衝出現時 間的比較圖形。	68
圖 3.17	當可飽和吸收體 Cr:YSO 與 Dy:CaF ₂ 平面耦合輸出鏡反射率 使用 78% , $N_{a0} = 3.86 \times 10^{15}$ 時 , R_p 對輸出能量的圖形。	69
圖 3.18	當可飽和吸收體 Cr:YSO 與 Dy:CaF ₂ 平面耦合輸出鏡反射率 使用 78% , $N_{a0} = 3.86 \times 10^{15}$ 時 , R_p 對輸出能量的圖形。	69
圖 3.19	當可飽和吸收體 Cr:YSO 與 Dy:CaF ₂ 平面耦合輸出鏡反射率 使用 78% , $R_p = 1.2 \times 10^{21} \text{ s}^{-1}$ 時 , N_{a0} 對輸出能量的圖形。 ...	70
圖 3.20	當可飽和吸收體 Cr:YSO 與 Dy:CaF ₂ 平面耦合輸出鏡反射率 使用 78% , $R_p = 1.2 \times 10^{21} \text{ s}^{-1}$ 時 , N_{a0} 對脈衝寬度的圖形。 ...	71
圖 4.1	1064 nm 雷射光之增益 N_g 、損失 $Loss_{n1}$ 及光子數 $n1$ 對時間 的關係圖。	78
圖 4.2	1440 nm 雷射光之增益 N_{a-up} 、損失 $Loss_{n2}$ 及光子數 $n2$ 對時 間的關係圖。	79
圖 4.3	1064 nm 之第一個雷射脈衝附近放大圖。	79
圖 4.4	1440 nm 之第一個雷射脈衝附近放大圖。	80
圖 4.5	1064 nm 雷射脈衝出現後約 700 ns 也可以看見 1440 nm 雷射 脈衝。	80

圖 4.6	1064 nm 波長的輸出耦合鏡的反射率對 1064 nm 與 1440 nm 雷射脈衝的最高光子數的關係圖。	81
圖 4.7	1440 nm 波長的輸出耦合鏡的反射率對 1064 nm 與 1440 nm 雷射脈衝的最高光子數的關係圖。	82
圖 4.8	變化溫度時所得到 Nd:YAG-Cr:YAG 被動 Q 開關雷射的輸出能量關係。	86
圖 4.9	變化溫度時所得到 Nd:YAG 的放射截面積變化關係圖。 ...	87
圖 4.10	亞歷山大雷射的有效放射截面積與溫度的關係圖。	88
圖 4.11	Nd:YAG 雷射光之峰值光子數 n_1 與 Cr:YAG 雷射光之峰值光子數 n_2 對溫度的關係圖。	90
圖 4.12	Nd:YAG 雷射光之第一個雷射脈衝的能量與 Cr:YAG 雷射光之第一個雷射脈衝的能量對溫度的關係圖。	91
圖 4.13	Nd:YAG 雷射光之第一個雷射脈衝的出現時間與 Cr:YAG 雷射光之第一個雷射脈衝的出現時間對溫度的關係圖。	92
圖 4.14	Cr:YAG 雷射光跟隨在 Nd:YAG 雷射光之後出現所花的時間。	93

第一章 固態雷射使用可飽和吸收體簡介

1.1 前言

雷射(LASER, light amplification stimulated emission of radiation)的起源，是由愛因斯坦在 1905 年，依據狹義相對論所提出光的量子性假說。1917 年，愛因斯坦又提出了居量反轉數(Population inversion)的受激輻射理論，如圖 1.1 所示[1]。

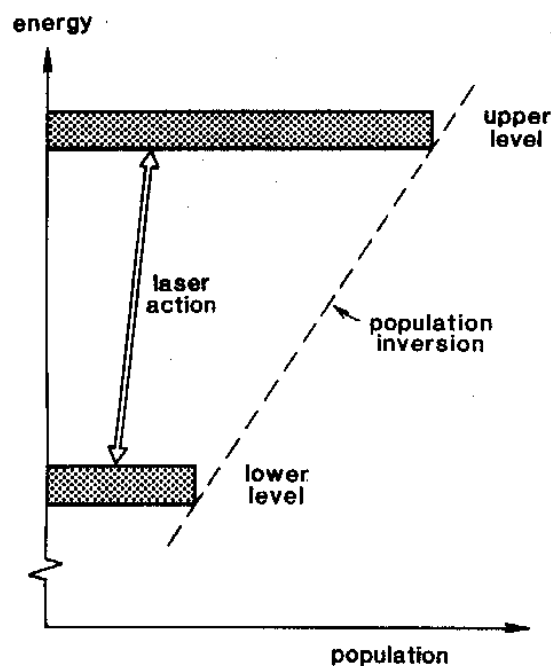


圖 1.1、介於雷射上能階與下能階之間的居量反轉數。

到了 1960 年，美國休斯公司實驗室的 Maiman 使用紅寶石晶體 (Cr:Al₂O₃)製造了世界上的第一個雷射，也就是紅寶石雷射。這時也證

實了愛因斯坦受激輻射理論。固態雷射都是由激發的晶體物質來命名的，本篇論文使用的雷射晶體就是使用紅寶石。

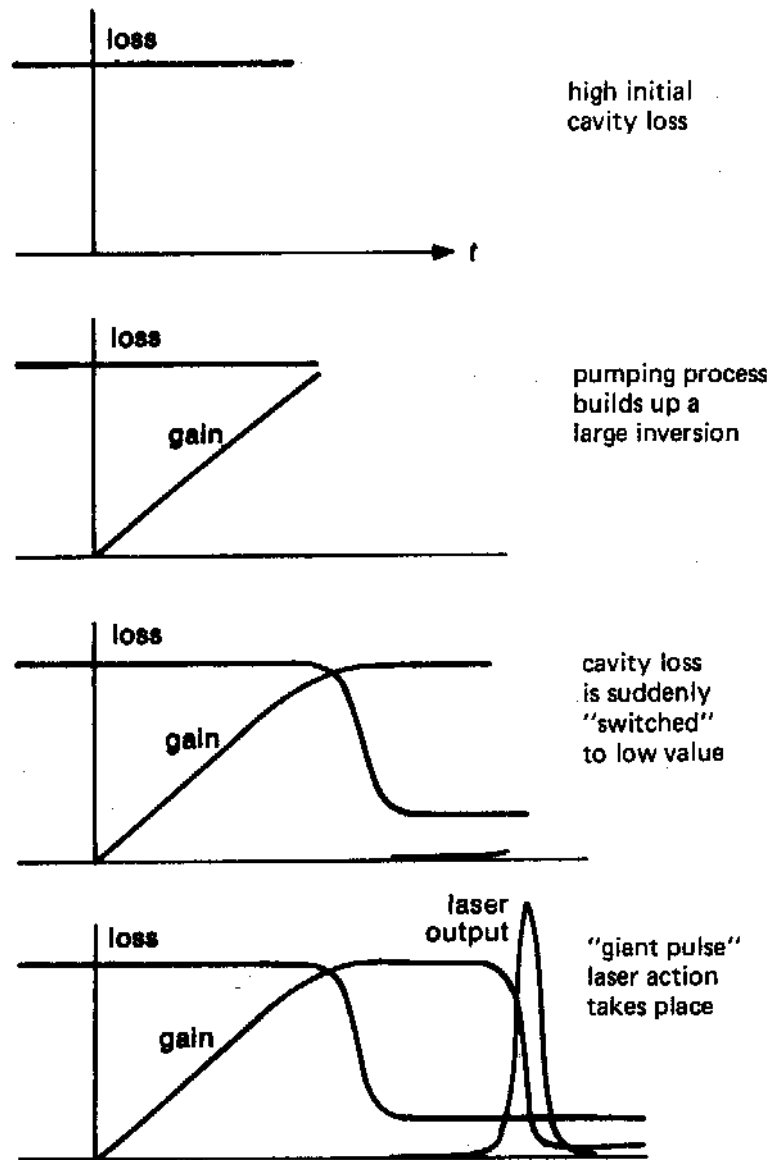


圖 1.2、Q 開關雷射產生步驟分解。

一般來說，可飽和吸收體可以分為主動與被動式可飽和吸收體。如果以物質的三態來分類，則也可分成屬於液態的染料可飽和吸收體和使用固態的晶體，本篇論文所使用的可飽和吸收體是使用 Cr:YSO 與 Dy:CaF₂ 兩種固態的晶體，圖 1.2 [1] 是 Q 開關雷射產生步驟分解情況，Q 開關雷射基本動態特性或強烈脈衝的概要示意圖。

在我們允許的一個雷射激發過程中，為了產生一個更大量的居量反轉數，Q 開關是一種廣泛使用的雷射技術。我們假設一開始共振腔的損失值，初始設定在某個合理的高值，也就是說，雷射共振腔裡，有一個人為假設的低值 Q_c ，即很低的品質因子 Q_c 。然後，使用激發光源(Pumping rate)激發雷射晶體，讓雷射晶體基態的電子數能夠跳到雷射的上能階，累積雷射的居量反轉數。本質上，可飽和吸收體這時候的角色，是我們阻礙了雷射反射鏡其中的一個，其擔任吸收雷射晶體發出波長的光子，並把可飽和吸收體大量的基態電子激發到高能階，所以無法產生共振。

當可飽和吸收體的基態電子數被激發到高能階的速率與高能階的電子自發輻射與受激放射到基態的速率達到平衡時，這個可飽和吸收體已經達到飽和。此時，可飽和吸收體不再吸收雷射晶體發出的波長的光子，如同透明晶體一般的通過。這時開始，共振腔損失突然的變低很多，換句話說，共振腔的品質因子 Q_c 突然「切換」到一個很高的值。雷射晶體發出特定波長的光子，由特定波長的反射鏡反射，開始共振與放大。然後，雷射晶體的雷射上能階的電子受激放射產生

雷射光，雷射晶體的居量反轉數開始快速減少。當居量反轉數降低到跟共振腔損失相同時，正是雷射脈衝光子數最高的時候。

因為可飽和吸收體飽和的情況，是基態電子吸收雷射晶體發出波長的光子，然後，基態電子躍遷到激態能階的速率與受激放射到基態的速率達到平衡。但當雷射晶體放射出雷射脈衝後，這個平衡狀態就被打破了。雷射晶體的居量反轉數快速減少，意味這雷射晶體的雷射上能階的電子，大量的躍遷回到基態能階而放出雷射光。此刻之後，雷射晶體的基態電子吸收激發光源的光子，累積居量反轉數的速率遠大於放出光子的速率。因此，可飽和吸收體自然沒有雷射晶體放出的光子可以吸收。所以，可飽和吸收體的基態電子躍遷到激態能階的速率與雷射上能階的電子受激放射到基態的速率變的無法達到平衡。可飽和吸收體的電子躍遷到激態能階的速率遠小於受激放射到基態的速率。最後，原本在可飽和吸收體高能階的電子大量的釋放回了基態。可飽和吸收體此刻不再飽和，而共振腔內的損失值又回到初始設定的高值。當然，共振腔的品質因子 Q_c 突然「切換」到一個很低的值。

固態被動 Q 開關雷射，就是這樣一次又一次切換增益與損失，然後產生一個一個的巨大的雷射脈衝。雷射共振腔裡面，當可飽和吸收體飽和之後，雷射晶體所發出雷射波長的光開始被共振與放大，初始的自發輻射與雜訊很快的產生很明顯的比例差，很快的就產生了強大的脈衝，然後開始飽和或是耗盡居量反轉數，事實上就是在很短的

時間下，大量釋放了雷射上能階的粒子數，才產生巨大的雷射脈衝。使用相同的激發光源，一般 Q 開關雷射的雷射脈衝功率會是連續波的 10^4 倍大[1]。一個很大的居量反轉數產生後，我們「切換」共振腔裡面的品質因子 Q_c ，回到它一般大的值。這個方法可以得到非常快而且強烈的雷射脈衝，當然這個雷射脈衝出現的時間是非常窄的，我們會選擇使用半高全寬(FWHM, full width at half maximum)的概念來描述它。因為這個雷射脈衝的出現，使幾乎所有儲存的居量反轉數粒子，在很短的時間內，完全從上能階跳到下能階，產生單一的雷射脈衝。一般來說，只有短短幾十個奈秒[1]。即使雙雷射系統中，可飽和吸收體當作第二個的雷射晶體所射出的雷射脈衝也不會比第一個雷射脈衝的半高全寬大上 10 倍[2]。

有幾個實際的應用，例如 laser ranging、laser cutting 和 laser drilling，還有非線性光學的研究。一個短而且強的雷射脈衝對這些研究是很有用，而且與長時間的連續波雷射比起來是很有效率。所以 Q 開關雷射對不同的雷射系統有實際上的重要性。在下面的一章裡面，我們要介紹 Q 開關雷射的一般特性，還有預習某些基礎分析的概念，包含描述 Q 開關雷射整個行為過程的聯立耦合方程式(Rate equations) [1]。了解分析被動 Q 開關的聯立耦合方程式更有助於了解這個雷射系統的行為概念。被動 Q 開關所使用的只是簡單的可飽和吸收介質，本篇論文中所使用到的可飽和吸收體 Q 開關晶體 Cr:YSO 與 Dy:CaF₂ 皆是屬於被動 Q 開關。固態雷射的研究不僅限於塊材的雷射晶體與 Q

開關晶體，當今正紅的半導體雷射和高亮度發光二極體也有運用可飽和吸收體 Q 開關晶體的概念[3-10]。在半導體雷射中，長上一層 $p\text{-InGaN}$ [6,7] 或者是 $p\text{-GaInP}$ [4] 當作可飽和吸收層，可以把原本連續波雷射變成是脈衝式雷射。圖 1.3 [6] 與圖 1.4 [7] 皆是可飽和吸收層在半導體雷射中的結構圖。

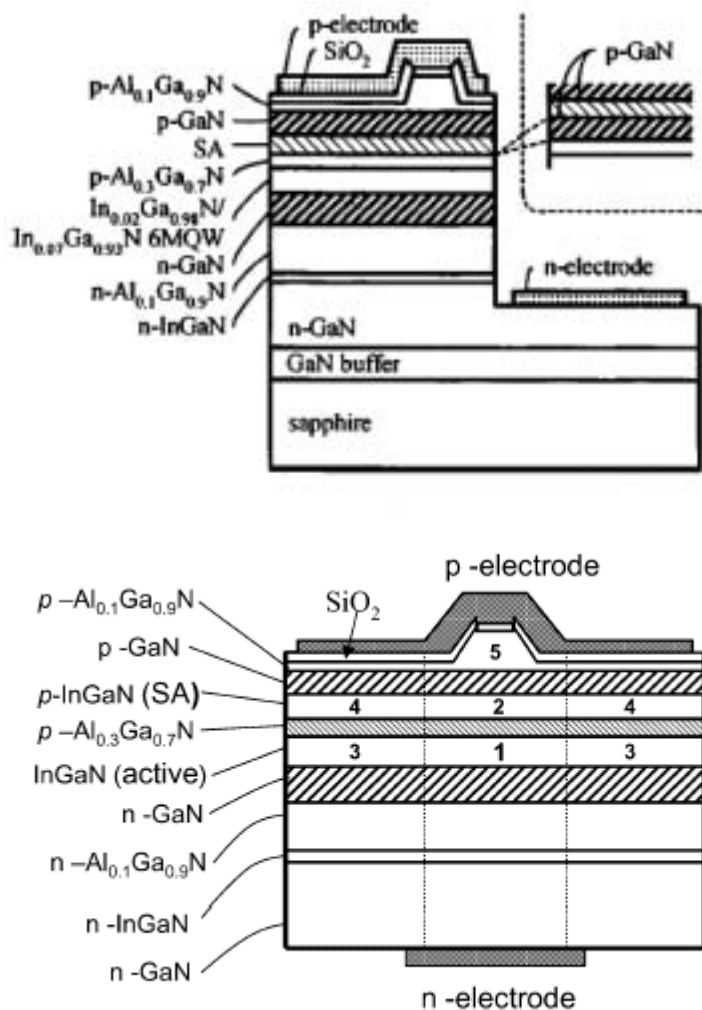


圖 1.3 使用 $p\text{-InGaN}$ 當成可飽和吸收層(SA, saturable absorber layer)

在奈秒的區域範圍裡，被動 Q 開關的固態雷射與半導體激發的雷射也有用在產生單頻雷射脈衝。雖然在 1- μm 的區域範圍裡，已經有很多的成功實例。但在最近的發展裡面，在眼睛安全的紅外光區與中紅外光區，使用半導體激發的雷射與被動 Q 開關的固態雷射兩者都可以產生單頻的雷射脈衝，而且被動 Q 開關的固態雷射還是在長波長的區域[11]。

也有一些學者研究溫度變化對固態雷射的影響。在很寬的溫度範圍下，他們假設雷射放射截面積在雷射共振腔中，溫度是唯一影響雷射截面積的參數，可以看到雷射輸出能量變化的趨勢。他們得到的結論是：第一，在長脈衝(Long-pulse)的情況下，斜率效率(Slope efficiency)沒有什麼太大的變化，臨界能量增加。當溫度增加的時候，輸出能量相對應的減少。第二，使用主動 Q 開關的固態雷射，而且輸入的能量固定成常數的情況時，輸出能量隨著溫度增加而減少。第三，使用主動 Q 開關的固態雷射，而且輸入能量由放大光譜放射限制(ASE, Amplified spontaneous emission)隨溫度變化的情況時，輸出能量隨著溫度增加而增加。第四，使用被動 Q 開關的固態雷射的情況時，輸出能量也是隨著溫度增加而增加[12]。

使用連續波半導體雷射激發的聲光被動 Q 開關 Nd:YAG 的固態雷射[13]，它的極大單一脈衝能量約 286 μJ [13]和 1.2mJ [16]，而且 13 kW 的峰值功率在 10 kHz 的頻率下重複出現。它可以被用來當作在自由空間中的光通訊光源[18]。在摻鉍光纖的改良設計上其實也有用到

可飽和吸收體來產生脈衝雷射光源。這是用半導體雷射激發，然後使用 Co:ZnSe 當作可飽和吸收體當作輸入摻鉕光纖的光源，如圖 1.4 所示[14,20]。

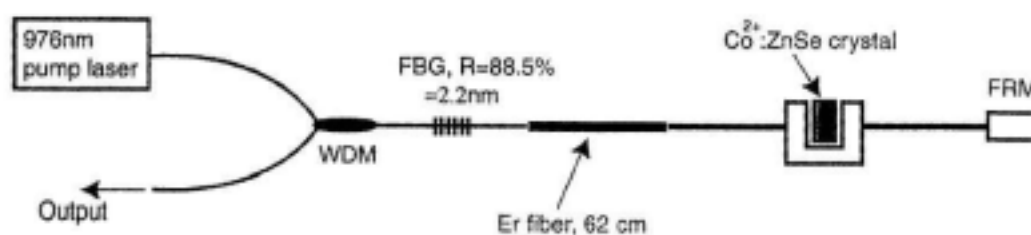


圖 1.4、可飽和吸收體的摻鉕光纖的光源示意圖。

交通大學的研究群使用 Cr:YAG 晶體，由半導體激發的 Nd: YAG 雷射來得到一個高峰值功率的 Q 開關的鎖模模態。研究單一極大的雷射脈衝功率幾乎大於 300 kW，他們覺得一般的情況，在同步鎖模的時候可以重現暫態的單一 Q 開關的固態雷射脈衝的外觀。鎖模的脈衝能量和總 Q 開關脈衝能量可以從遞迴的推導中計算出來[15]。也有研究人員使用兩部分相連的半導體雷射，一部分是半導體雷射一部分是當作可飽和吸收體的 Q 開關鎖模雷射[17]，還有其他使用 Q 開關做鎖模雷射的系統研究[21]與使用被動 Q 開關雷射做 Raman 轉換的研究[22,23]。還有為了增加雷射脈衝能量與峰值功率使用半導體的 Q 開關雷射的研究，他們使用了 type-II 的量子井[24]。

參考文獻

- [1] A. E. Siegman, *Lasers*, (University Science Books, Mill Valley, California), 1986.
- [2] Y. K. Kuo, “Passive Q-switching of the Cr:Al₂O₃ Laser, Cr:LiCaAlF₆ Laser, and Tm,Cr:Y₃Al₅O₁₂ Laser Using Dy²⁺:CaF₂, Cr⁴⁺:Y₂SiO₅, and Ho:YLiF₄ Solid-State Saturable Absorbers,” Ph. D. Dissertation(University of southern California), 1994.
- [3] 郭艷光, 1998 年 2 月, “電子躍遷與雷射效應”, 科學月刊 (Science Monthly), 第 29 卷, 第 2 期, 第 133 至 138 頁.
- [4] H. Adachi, S. Kamiyama, I. Kidoguchi, and T. Uenoyama, “Self-Sustained Pulsation in 650-nm-Band AlGaInP Visible-Laser Diodes with Highly Doped Saturable Absorbing Layer,” *IEEE Photonics Technol. Lett.*, Vol. 7, pp. 1406–1408, 1995.
- [5] I. Kidoguchi, H. Adachi, T. Fukuhisa, M. Mannoh, and A. Takamori, “Stable Operation of Self-Sustained Pulsation in 650-nm-Band AlGaInP Visible Lasers with Highly Doped Saturable Absorber Layer,” *Appl. Phys. Lett.*, Vol. 68, pp. 3543–3545, 1996.
- [6] T. Ohno, S. Ito, T. Kawakami, and M. Taneya, “Self-pulsation in InGaN laser diodes with saturable absorber layers,” *Appl. Phys. Lett.*, Vol. 83, pp. 1098–1100, 2003.
- [7] V. Z. Tronciu, M. Yamada, member, T. Ohno, S. Ito, T. Kawakami, and M. Taneya, “Self-Pulsation in an InGaN Laser-Theory and

- Experiment,” *IEEE J. Quantum Electron*, vol. 39, NO. 12, pp. 1509–1514, 2003.
- [8] M. Yuri, J. S. Harris, Jr., T. Takayama, O. Imafuji, H. Naito, M. Kume, K. Itoh, and T. Baba, “Two-Dimensional Analysis of Self-Sustained Pulsation for Narrow-Stripe AlGaAs Lasers,” *IEEE J. on Sel. Top. in Quantum Electron*, vol. 1, NO. 2, PP. 473–479, 1995.
- [9] R. C. P. Hoskens, T. G. van de Roser, C. J. van der Poel and H. P. M. Ambrosius, “Self-pulsating lasers with quantum well saturable absorber,” *Appl. Phys. Lett.*, Vol. 67, pp. 1343–1345, 1995.
- [10] M. Yamada, “A Theoretical Analysis of Self-Sustained Pulsation Phenomena in Narrow-Stripe Semiconductor Lasers,” *IEEE J. Quantum Electron*, vol. 29, NO. 5, PP. 1330–1336, 1993.
- [11] D. Welford, “Passively Q-switched Lasers,” *IEEE Circuits and Devices Magazine*, vol. 19, PP. 31–36, 2003.
- [12] M. Bass, L. S. Weichman, S. Vigil, and B. K. Brickeen, “The Temperature Dependence of Nd³⁺ Doped Solid-State lasers,” *IEEE J. Quantum Electron*, vol. 39, NO. 6, PP. 741–748, 2003.
- [13] X. J. Huang, Y. Z. Liu, Z. Sui, and M. Z. Li, “A stable Q-switched laser source for free-space optical communication,” *Communications, Circuits and Systems ICCAS International Conference*, vol. 1, PP. 601–603, 2004.
- [14] V. N. Philippov, A. V. Kir'yanov, and S. Unger, “Advanced

- configuration of erbium fiber passively Q-switched laser with $\text{Co}^{2+}:\text{ZnSe}$ crystal as saturable absorber,” *IEEE Photonics Technology Letters*, vol. 16, PP. 57–59, 2004.
- [15] Y. F. Chen, J. L. Lee, H. D. Hsieh, and S. W. Tsai, “Analysis of passively Q-switched lasers with simultaneous mode locking,” *IEEE J. Quantum Electron*, vol. 38, NO. 3, PP. 312–317, 2002.
- [16] A. Piper, A. Malinowski, K. Furusawa, and D. J. Richardson, “High-power, high-brightness, mJ Q-switched ytterbium-doped fibre laser,” *IEEE Electronics Letters*, vol. 40, NO. 15, PP. 928–929, 2004.
- [17] M. B. Flynn, L. O’Faolain, and T. F. Krauss, “An experimental and numerical study of Q-switched mode-locking in monolithic semiconductor diode lasers,” *IEEE J. Quantum Electron*, vol. 40, NO. 8, PP. 1008–1013, 2004.
- [18] L. Tordella, H. Djellout, B. Dussardier, A. Saissy, and G. Monnom, “High repetition rate passively Q-switched $\text{Nd}^{3+}:\text{Cr}^{4+}$ all fibre laser,” *IEEE Electronics Letters*, vol. 39, NO. 18, PP. 1307–1308, 2003.
- [19] V. L. Kalashnikov, V. G. Shcherbitsky, N. V. Kuleshov, S. Girard, and R. Morcorge, “Optimization of passively Q-switched Er:glass laser,” *Lasers and Electro-Optics CLEO Conference*, vol. 1, PP. 510–511, 2002.
- [20] V. N. Philippov, and A. V. Kir’yanov, “Advanced configuration of

- diode-pumped erbium fibre laser with $\text{Co}^{2+}:\text{ZnSe}$ crystal as saturable absorber,” Lasers and Electro-Optics CLEO/Pacific Rim Conference, vol. 2, PP. 432, 2003.
- [21] P. K. Datta, S. Mukhopadhyay, G. K. Samanta, S. K. Das, and A. Agnesi, “Realization of inverse saturable absorption by intracavity third-harmonic generation for efficient nonlinear mirror mode-locking,” *Appl. Phys. Lett.*, Vol. 86, pp. 151105, 2005.
- [22] A. A. Ishaaya, N. Davidson, L. Shimshi, and A. A. Friesem, “Intracavity coherent addition of Gaussian beam distributions using a planar interferometric coupler,” *Appl. Phys. Lett.*, Vol. 85, pp. 2187–2189, 2004.
- [23] L. E. Batay, “Efficient diode-pumped passively Q-switched laser operation around 1.9 μm and self-frequency Raman conversion of Tm-doped $\text{KY}(\text{WO}_4)_2$,” *Appl. Phys. Lett.*, Vol. 81, pp. 2926–2928, 2002.
- [24] Jacob B. Khurgin, Igor Vurgaftman, and Jerry R. Meyer, “Modeling of Q-switched semiconductor lasers based on type-II quantum wells: Increasing the pulse energy and peak power,” *Appl. Phys. Lett.*, Vol. 80, pp. 2631–2633, 2002.

第二章 MATLAB 與數值模擬簡介

2.1 前言

數值模擬，一直以來都扮演著舉足輕重的角色。現在的數值方法只使用算數及邏輯運算，然後直接放到電腦上去運作，以求得數學問題的解答。

數值方法與電腦的結合應用，使得數值分析成為能夠發揮極大功能的一種工具。例如：可以解決非線性方程式、大方程式組、微積分、微積分方程式、微積分方程組。這些可以在一般的工程數學或是數值模擬的書上[1-3]或是參考資料上，找到很清楚的分析。此篇論文只針對微分方程式中的朗奇-庫塔-費爾柏格(Runge-Kutta-Fehlberg)方法做介紹分析。當然，數值分析也有它的限制，如某些數學的問題上，其結果的精確度無法達到要求，或是無法產生完整的數學模式。所以探討導致精確度問題的「誤差」，還有微分方程式數值求解的「穩定性」就非常重要了。

如果使用 Matlab 來完成數值模擬的工作，我們必須先了解 Matlab 這套數學軟體。Matlab 是由 Math Works 公司於 1984 年推出的數學軟體，最早的發展理念是提供一套非常完善的矩陣運算指令，隨著數值運算需求的演變，Matlab 發展成系統模擬、數位訊號處理、自動化混合系統模擬的工具。Matlab 為使用者建立三個主要的介面，原本的

Matlab 交談式介面(包含了圖形使用者介面設計 GUIDE); 和 Simulink 的連續或離散時間的動態系統模擬; 最後還有 Stateflow 的模擬有限狀態或事件驅動系統。我所使用到的部分只有原始的 Matlab 交談式介面撰寫數值模擬程式來做本文章的數值分析。

2.2 數值模擬的簡介

數值模擬的內容，經過近代科技與數值計算的相輔相成，在市面上已經有太多的書籍在介紹，而且內容可以說非常的完整，而且有充分的習題。有興趣的人可以往這方面去找尋自己想要的資料。而我的碩士論文裡面，所要介紹的數值模擬部分，主要還是微分方程式裡的朗奇-庫塔(Runge-Kutta)方法[1]。因為本篇碩士論文所要研究的紅寶石雷射使用 Cr:YSO 與 Dy:CaF₂ 晶體之數值分析，還有，雙雷射系統的數值分析，都是使用 Matlab 裡工具箱裡的 ode45 副程式。關於 ode45 副程式會在下一節裡面介紹。

首先，不可不提的是，數值模擬的誤差與穩定度。本篇論文會比較著重在截斷誤差(Truncation error)的介紹。根據誤差與其他因素會影響程式的穩定度，進而影響模擬結果的可信度與精確度。所謂的「誤差」，就是我們所求的值與真正的值(True solution)之間的差距，如果誤差越小表示我們所使用的方法「精確度」越高。一般的誤差分為兩種來測量，就是絕對誤差與相對誤差：

$$\text{絕對誤差(Absolute error)} \quad e_x = |x - \bar{x}|,$$

$$\text{相對誤差(Relative error)} \quad rel.e_x = \frac{e_x}{|x|} \cong \frac{e_x}{|\bar{x}|}.$$

其中 x 就是真正的解或是真正的值。 \bar{x} 就是我們數值方法的估算值(Computed approximation)。相對誤差的計算必須先算出絕對誤差。通

常相對誤差會比絕對誤差有分析上的意義。而誤差的來源大概可以分成原始資料的誤差(Initial data errors)、截斷誤差(Truncation errors)與約略誤差(Rounding errors)。原始資料的誤差，就是資料來源處理上產生的誤差，比如說實驗的結果在測量上的誤差、太理想的假設或是太簡化的假設、數學常數的不準確表示法(例如自然指數 e 用 2.718 或是 2.718282 來取代都會產生不同的誤差與精確度)。截斷誤差，這是因為我們使用的數值分析方法給的估計值不完整。比如說常見的泰勒級數展開式，我們用它在 a 這一點來展開餘弦函數：

$$\cos(x-a) = 1 - \frac{(x-a)^2}{2!} + \frac{(x-a)^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{(x-a)^{2n}}{(2n)!} + \dots,$$

這個展開式應該是要有無限多項的，但是不管是用人手計算或是用電腦計算，我們都必須取到某一項，以下的截斷刪去，所以跟這無限多項所得到的值的誤差，就是截斷誤差。

又例如後面要敘述的費爾伯格第五階 Runge-Kutta 公式：

$$y_{n+1} = y_n + \gamma_1 k_1 + \dots + \gamma_6 k_6,$$

與費爾伯格第四階 Runge-Kutta 公式：

$$y_{n+1}^* = y_n + \gamma_1^* k_1 + \dots + \gamma_5^* k_5。$$

這兩個公式也都是取有限項目，自然就會產生截斷誤差。上面的 γ_1 到 γ_6 是第五階向量係數， γ_1^* 到 γ_5^* 是第四階向量係數。第五階與第四階公式共用 k_1 到 k_6 這六個函數。其實很多數值方法都是用反覆代入法(先由初始預估值代入我們選用的數值方法，得到的結果再一次代入

這個數值方法，反覆代入直到符合我們滿意的誤差後停止)，收斂的估計值在重複代入次數後就會比上一次的估計值精確，但我們必須在有限的次數下就必須中斷停止，不可能在電腦上無限制的讓它跑下去，這也會產生截斷誤差。

然後還有約略誤差。這是因為我們使用的計算機或是電腦，只有有限的位數來紀錄數值，所以很多浮點運算的數值都無法在電腦上精確的表示，而且用這些數值做數值運算後，誤差可能就會更無法掌握。所以使用有限的有效位數來運算，產生的誤差就是約略誤差。

什麼是微分方程中的朗奇-庫塔-費爾伯格(Runge-Kutta-Fehlberg)方法？用很簡單的說法就是：費爾伯格發現兩種 Runge-Kutta 公式，也就是費爾伯格第五階 Runge-Kutta 公式和費爾伯格第四階 Runge-Kutta 公式。然後把費爾伯格第五階 Runge-Kutta 公式減去費爾伯格第四階 Runge-Kutta 公式，得到誤差估算值(Error estimate value)。這個值用來做下一步的步距控制，這就是 Runge-Kutta-Fehlberg(RKF)法。所謂 h 步距(Step size)控制的機制就是，例如：任選一個很小的數 a 。而 h 是在閉區間等間隔的微小分割值。我們可以任選微小範圍 $0.1a < \delta < 10a$ 時， h 保持不變；當微小範圍 $\delta > 10a$ 時， h 變成 $h/2$ ；當微小範圍 $\delta < 0.1a$ 時， h 變成 $2h$ 。這種調節程序的 Runge-Kutta 法已經內建於 Matlab 工具箱中的 ode45 與 ode23 副程式中。

下面是 Runge-Kutta 法的穩定性問題的探討。一般數值模擬的穩

定性問題，都是探討我們採用的數值方法所得到的解是否發散或是收斂。Lambert 在 1973 年和 Ralston 與 Rabinowitz 在 1987 年[2]，皆提出了一些對解微分方程之數值方法的穩定性的探討分析。這裡做簡單的描述。當我們用數值方法解微分方程式的時候，我們最需要考慮的就是距離初始點越遠的時候，誤差是否越來越大？如果誤差能控制在我們所訂定的合理範圍內，我們所使用的數值方法對我們所遇到的微分方程式是穩定的(Stable)；如果誤差越來越大，而且我們所使用的數值方法沒有自行調整縮小誤差的機制，則最後的結果一定是發散的。也就是說我們選用的這種數值方法，來解我們遇到的微分方程式是不穩定的(Unstable)，所以，這個時候我們必須另外選用其他的數值方法來解我們遇到的微分方程式。

因此，我們知道微分方程式數值解法的穩定性， h 步距控制與步距的選取是有其必要性與重要性。就拿微分方程式之 Runge-Kutta 數值方法的穩定性來說，Runge-Kutta 數值方法通常都可以降低步距來解決不穩定性的問題。所以，Runge-Kutta 數值方法是屬於在部分穩定性(Partial instability)討論範疇的一種數值方法。所謂部分穩定性就是：當步距選的不夠小的時候，距離初始點越遠，誤差就越大；但當步距選的夠小的時候，距離初始點越遠，誤差依舊在合理範圍內。

Runge-Kutta 數值方法可以將步距縮小到足夠小的數值時，可以消除原本步距造成的不穩定性，但是 Runge-Kutta 法每一步所需要的函數 k_1 到 k_6 ，可能會比其他的微分方程式數值方法來的多。所以，如

果步距選的太小，將會使這個數值方法變的很慢。不過由於現在計算機發達，這問題不會像當初沒有高速計算機的時候嚴重。不過，這點還是說明了步距控制與步距的選取的重要性。Matlab 工具箱中的 ode45 與 ode23 副程式很聰明的選取步距，讓計算函數 k_1 到 k_6 的次數適當化。

2.3 Matlab 的簡介

Matlab 是由 Math Works 公司於 1984 年推出的數學軟體。至今已更新了七個主要版本。至於對於 Matlab 的內容，可以從 Math Works 公司網站、台灣代理商鈦思科技公司網站、市面上的書籍[4,5]甚至電子電機工程類 IEEE 投稿雜誌中找到相關資料。本論文對於 Matlab 的介紹只是關於固態雷射模擬的指令、迴圈、主副程式等的部份。

Matlab 的交談式介面，每一行所寫下的敘述，都是寫下或是修改後，馬上存檔就可以馬上再執行程式。所以是非常的方便。Matlab 這個名字是由「matrix」與「laboratory」這兩個英文字來合成。顧名思義就是「矩陣實驗室」。這個名字不是空穴來風，而是很有意義的。我們所寫入的數字、矩陣或是字元，對 Matlab 而言，其實都被定義成了矩陣。這個差別就在於我們原本認定是數字或是變數的值，如果跟其他的數字或變數產生了函數上的關係，它們就必須要有相同的維度。這個原理不會不好了解，因為 2×2 的矩陣與 3×3 的矩陣是沒有辦法做運算的。而在撰寫下一節中的聯立耦合方程式的副程式裡一開始就先要定義這個副程式回傳值的矩陣維度，不然就會產生運算上的錯誤(Mistakes，這邊的錯誤跟數值運算的誤差(Errors)是不同的)。例如，三個聯立耦合方程式的副程式的傳回值是時間 t ，還有光子數、反轉粒子數、可飽和吸收體基態粒子數 $[n \ N_g \ N_a]$ 。則就必須先定義回傳值 t 是一個 1×1 矩陣，回傳值 $[n \ N_g \ N_a]$ 是一個 3×1 矩陣。同理，四個聯立

耦合方程式的傳回值時間 t ，還有紅寶石雷射晶體產生脈衝的光子數、Cr:YSO 晶體產生脈衝的光子數、反轉粒子數、可飽和吸收體基態粒子數 $[n1\ n2\ N_g\ N_a]$ 。則就必須先定義回傳值 t 是一個 1×1 矩陣，回傳值 $[n1\ n2\ N_g\ N_a]$ 是一個 4×1 矩陣。

我的論文裡在本章的部分會截取幾個程式敘述句，但為求參數的相同，我在論文中統一了所有的參數的表示法，所以會與附錄中的程式有些許的不同。至於有一點，Matlab 的四則運算符號，就是加減乘除。也受到前面所說的，數字、矩陣或是字元，對 Matlab 而言，其實都被定義成了矩陣。所以，在矩陣相乘與相除的時候必須寫成 $*$ 與 $/$ 的形式。但在內文解釋的時候我只採用 $*$ 與 $/$ 表示相乘與相除，這一點請讀者注意。

在指令的部分，Matlab 採用與 C 語言相類似的描述方式，但採用更方便的撰寫方式，一般 Matlab 的說明書或是一般介紹 Matlab 的書籍都會說明使用 help 指令來找尋其他指令的用法。這邊介紹幾個在此篇論文模擬程式的重要的指令：

主程式部分：

global：這個指令在 Matlab 是用在如果需要同時變化主程式與副程式裡相同的變數時候。在紅寶石雷射使用 Dy:CaF₂ 可飽和吸收體的主程式與副程式當中，有同時需要變化的參數。例如：初始的可飽和吸收體基態粒子數 N_{a0} 、光子照射雷射晶體的照射頻率 R_p 、共振腔輸出功率那一面的反射鏡的反射率

R 、光子損失 $Loss$ (雙雷射系統的是 R_1 、 R_2 與 $Loss_1$ 、 $Loss_2$)。被宣告成 `global` 的參數，不管在主程式或者是副程式中修改都有效。如果主副程式有相同參數但沒有宣告 `global` 的話，在主程式中變化此參數值，副程式完全不會跟的變化，最後又會產生程式運作的錯誤。還有，宣告成 `global` 的參數不論是主程式或是副程式都要有相同的宣告敘述才會有效。

`subplot`：這是一個繪圖的指令。它是用來設定顯示格式的。通常這個指令會跟其他的繪圖指令一起使用，例如與 `plot` 指令。`subplot` 指令裡面包含三個數值。例如 `subplot(312)`，這三個數字的代表一個次圖形。(代表很多張圖合成一個圖形陣列，次圖形指的是這些圖中的某一張)。第一個數字代表這張次圖形在圖形視窗分割陣列裡有幾列，第二個數字代表這張次圖形在圖形視窗分割陣列裡有幾行，第三個數字代表這張次圖形在圖形視窗分割陣列裡的第幾順位。所謂第幾順位是由左而右，由上而下。所以 `subplot(312)` 的意思就是這張圖形裡面，有三列次圖形，有一行次圖形，而所指的次圖形是第二順位的那一張。所以這就是有三張圖由上往下擺放，而我們看到的是中間的那張圖形視窗分割陣列裡的。我們就用主程式裡面的一行有此指令的敘述來說明。

```
subplot(6,1,1),plot(tout(:,1),yout(:,1))
```

這行的意思是，從時間的矩陣取第一行的所有點當橫軸，從

$[n1\ n2\ N_g\ N_a]$ 矩陣裡取第一行的所有點當縱軸(`tout`, `yout` 就是從聯立耦合方程式回傳的值，事實上它們是很大的一個矩陣)，然後畫圖。這張圖形當成圖形視窗分割陣列裡的次圖形，這圖形陣列有六列，有一行，剛剛畫的圖放在第一個順位。通常敘述最後需要加上分號不要在執行中就跑出圖形來但這裡就是要在執行中讓圖形跑出來才不加上分號的。

`max`：這是選出最高值資訊的指令。在雷射脈衝的圖形中總有最高的點要取出，所以使用這個指令來比較各點的值來找出最高點資訊。我們就用主程式裡面的一行有此指令的敘述來說明。

```
[p, j] = max(yout(:,1));
```

這是在 $[n1\ n2\ N_g\ N_a]$ 矩陣裡取第一行的所有點找出最大值，這最大值的位置放在 j 這個參數裡，這最大值的數值放在 p 這個位置裡。

`fprintf`：這個指令如果是在 C 語言中，代表的功能是在螢幕上印出我們在 `fprintf` 指令裡輸入的字元。但是在 Matlab 裡面 `fprintf` 指令還有另一個功能，就是把資料格式依照指定的字串來寫入 ASCII 檔案。指定的字串格式例如：`%e` 參數代表使用科學記號來表示數值。其中英文字母的 ASCII 編碼就類

似繁體中文文字的 Big5 編碼。用主程式裡面的一行有此指令的敘述來說明。

```
fprintf('QQ 得到一組合理數據\n\n')
```

這就是用 fprintf 在電腦一螢幕上印出「QQ 得到一組合理數據」這些字元，\n 就是換行。另一個功能在下面一個指令的介紹裡就會提到。

save：這是儲存資料點檔案的指令。我們就用主程式裡面的一行有此指令的敘述來說明。

```
save kkk.txt z -ascii
```

把 z 這個矩陣裡的資料點儲存成 8 bytes 大小到檔名為 kkk 的文字檔。

但是通常我們儲存的檔案有可能需要保留原來檔案中並且增加新的數據，這個時候最好不要用 save 指令，因為原始資料會被覆蓋。一般的程式都會用迴圈來重複執行計算並儲存資料數據，所以使用檔案開啟與關閉的指令會比較適當，這一般的程式語言都有這種指令。在 Matlab 裡面所使用的指令是 fopen 與 fclose。我們就用主程式裡面的敘述來說明：

```
a = [Rp Na0 a1 a2];
```

```
[fid, message] = fopen('dual_ys0.txt','a');
```

```
fprintf(fid,'%e %e %e %e %e %e\n',a);  
fclose(fid)
```

這四行的敘述的意思是用 `fopen` 指令來開啟 `dual_ys0.txt` 這個檔案。而對 `dual_ys0.txt` 這個檔案的處理方式，我們可以看 `a+` 這個參數，它代表「可以讀取資料並且可以加入資料 (reading and appending)」。 `fid` 參數只是檔案的識別碼，通常如果開啟檔案成功的話，回傳值通常是非負的整數。如果傳回值是 `-1`，則代表檔案可能不存在或是使用者沒有權限開啟這個檔案。而真正的原因訊息可以從 `message` 這個參數得知。在 `fprintf` 指令裡面有六個 `%e` 參數，`%e` 參數代表使用科學記號來表示數值，也就是例如： 1.23×10^{16} 的形式。然後相對於 $a = [R_p \ N_{a0} \ a1 \ a2]$ 矩陣裡參數的個數。這裡我們只看到 `a` 矩陣裡只有 `Rp`、`Na0`、`a1`、`a2` 共四個參數。但為何使用六個 `%e` 參數？其實是因為 `a1` 矩陣裡包含兩個參數 E_1 與 dw_1 ， E_1 是雙雷射系統中主要雷射晶體第一個雷射脈衝的能量， dw_1 是雙雷射系統中主要雷射晶體第一個雷射脈衝的半高全寬。`a2` 矩陣裡包含兩個參數 E_2 與 dw_2 ， E_2 是雙雷射系統中可飽和吸收體當作雷射晶體第一個雷射脈衝的能量， dw_2 是雙雷射系統中可飽和吸收體當作雷射晶體第一個雷射脈衝的半高全寬。所以一共有六個參數。最後在用 `fclose(fid)` 來

關閉檔案 dual_ys0.txt。關閉成功則回傳值 $fid = 0$ ，如果無法順利關閉檔案回傳值 $fid = -1$ 。

clear：這是清除參數裡儲存值的指令。通常執行一遍程式就會有新的數值覆蓋舊的數值，這是一般合理的情況。但是如果程式執行後某個數值因為初始區間取的不對或是其他原因而沒有新的數值出現，程式就會用舊有的數值繼續運算，而不出現錯誤的警告。這種結果反而得到錯誤解而且還不知情。所以最好是使用這個指令，在程式執行下一個迴圈或是在重新執行一次的時候，清空最後結果的參數裡的儲存數值。如果使用了 global 指令，就必須要使用 clear global 來清除主副程式裡共同參數裡的儲存值。

副程式部分(即三個或是四個聯立耦合方程式的描述程式)：

function：所有 Matlab 副程式的第一行都是使用 function 開頭的。所以如果程式設計者所撰寫的程式或是主程式很有用，或是可以被其他程式所呼叫。則我們可以在主程式上使用這個指令，把此有用的程式變成可以被呼叫的功能副程式。舉四個聯立耦合方程式的例子來說明：

```

function popu = Ruby_CrYSO(t,n)
popu = zeros(4,1);
...
popu(1) = (Kg*n(3)-Ka*n(4)-β*Ka*(Na0-n(4))-τc1)*n(1);
popu(2) = (Ke*(Na0-n(4))-γc2)*n(2)+γc2;
popu(3) = Rp-γg*n(3)-g*Kg*n(3)*n(1);
popu(4) = γa*(Na0-n(4))-Ka*n(4)*n(1)+Ke*(Na0-n(4))*n(2);

```

Ruby_CrYSO 就是這個副程式的執行檔名，而 t 與 n 是從主程式裡傳入到副程式的參數，讓副程式來計算使用。其中 $t = [0 \ t]$ ，然後 $n = [n1 \ n2 \ ng \ N_a] = [n(1) \ n(2) \ n(3) \ n(4)]$ 當作初始值，然後代入計算。其中 popu 這個參數裡被 zeros 指令預設成了維度 4×1 零的矩陣，然後由時間矩陣 $[0 \ t]$ 的起始點 0 開始，ode45 程式解四個聯立方程式得到一組新的 $[n(1) \ n(2) \ n(3) \ n(4)]$ 與一個時間點 $[t]$ ，然後把這兩個矩陣傳回到主程式，則參數 tout = $[t]$ ，還有 yout = $[n(1) \ n(2) \ n(3) \ n(4)]$ 。除此之外，剛剛得到的這組 $[n(1) \ n(2) \ n(3) \ n(4)]$ 取代初始值再一次代入聯立方程式，在下一個分割的時間點再用 ode45 程式執行一次，再次得到新的 $[n(1) \ n(2) \ n(3) \ n(4)]$ 。然後再把結果傳回主程式疊加在 tout = $[t]$ 和 yout = $[n(1) \ n(2) \ n(3) \ n(4)]$ 兩個矩陣上面，直到時間矩陣的終點計算完成為止。

而 $\text{popu} = [\text{popu}(1) \text{ popu}(2) \text{ popu}(3) \text{ popu}(4)]$ 呢?其實這就是 Matlab 求解微分方程式或是聯微分方程組, $\text{yout} = [n(1) \text{ } n(2) \text{ } n(3) \text{ } n(4)]$ 參數矩陣對時間的變化率或是對頻率的變化率或其他的變化率的矩陣, 而這個矩陣不會回傳到主程式。

`zeros`: 這是一個特殊用途矩陣的指令。我們就用副程式裡面的一行有此指令的敘述來說明。

```
popu = zeros(4,1);
```

這一行的敘述是, 產生維度 4×1 且元素全部為零的矩陣。然後把這個矩陣存到 `popu` 這個參數中。使用這個指令的目的是如同前面所描述的, 我們所寫入的數字、矩陣或是字元, 對 Matlab 而言, 其實都被定義成了矩陣。所以, 我們就必須先定義副程式回傳值的維度大小, 避免不必要的錯誤。

迴圈的部分, Matlab 的迴圈指令是使用:

`for...end`: 程式語言中迴圈指令的用途就是, 有順序的讓電腦能夠執行相同的程式敘述很多遍, 然後判斷終止或是繼續。

Matlab 的迴圈指令是使用 `for...end`。當然 `while...end` 也是 Matlab 的迴圈指令, 不過用法不同。而用法會依照程式撰寫者的喜好或是需要決定是否使用。這跟一般人類的語言是一樣的, 雖然想表達的意思大同小異, 但是依照每個人的風格

不同而有不同的用法。而我個人喜歡把 for...end 與 if...elseif...else...end 合併使用。下面有舉例說明。這裡先舉一個有此指令的敘述來說明。

```
for count00 = 1:2:10
    t = count00*9e-4;
end
```

這三行敘述的意思是說，我要把 count00 這個變數從 1 變化到 10，然後以等間隔 2 為變化長度的步距。然後把 count00 的值乘上 9×10^{-4} ，把結果儲存到變數 t 。然後重複迴圈，直到 count00 = 10 也計算完成並儲存後。才由 end 指令結束迴圈。所以這個迴圈會變化五次。

if...elseif...else...end：就如同其他的程式語言一樣，Matlab 也需要依據條件來決定是否進行下一步或者跳過下一步的指令。我舉紅寶石雷射使用兩個厚度可飽和吸收體 Dy:CaF₂ 與三個反射鏡反射率模擬程式的這一段來說明 if...elseif...else...end 指令的用法。

```
for count06 = 1:1:1
    if today == 1 %用這個判斷式決定是否跳出迴圈
        break
```

```

elseif today == 0

for count04 = 1:1:3
    if count04 == 1
        R = 0.78;
    elseif count04 == 2
        R = 0.84;
    elseif count04 == 3
        R = 0.89;
    else
        fprintf('反射鏡的反射率這裡有問題')
    end

    % delta = 1-R*(1-L);
    % tc = tr/delta;
    % rc = 1/tc;

for count05 = 1:1:2
    if count05 == 1
        Na0 = (15/8) *(2.06e15);
        na = Na0;
        L = 0.1;
        delta = 1-R*(1-L);
        tc = tr/delta;
        rc = 1/tc;
    elseif count05 == 2
        Na0 = (3.6e15)*count06;
        na = Na0;
        L = 0.6;
        delta = 1-R*(1-L);

```

```

        tc = tr/delta;
        rc = 1/tc;

    else
        fprintf('count05 is error\n\n')
    end

    .....
    end    % end of count05
end    % end of count04

.....
end
end    % end of count06

```

其中 R 是共振腔平面耦合輸出鏡輸出那一面的反射率，實驗上使用了三組鏡子的反射率，在波長 694 nm 時，反射率分別為 78%、84%與 89%的平面耦合輸出鏡[6]。兩個 Dy:CaF₂ 晶體分別是 8 與 15 mm 厚度，這直接關係到可飽和吸收體基態電子數 N_{a0} 的比值。15 mm 厚度會比 8 mm 厚度多 15/8 倍。我使用 count04 參數控制三組鏡子的反射率，count04 = 1 的時候，選擇使用 78%的平面耦合輸出鏡。count04 = 2 的時候，選擇使用 84%的平面耦合輸出鏡。count04 = 3 的時候，選擇使用 89%的平面耦合輸出鏡。如果都不是則在螢幕上列印出「反射鏡的反射率這裡有問題」。當以上四種情況發生一種並執行完成後跳出 if...elseif...else...end 的迴圈。以上的每一種情況中又包含 count05 參數的兩種情況。當

count05 = 1 的時候，使用 15 mm 厚度 Dy:CaF₂ 晶體，再使用 count06 來規律的控制某範圍的 N_{a0} 。同理的，當 count05 = 2 的時候，使用 8 mm 厚度 Dy:CaF₂ 晶體。所以 count05 是控制 Dy:CaF₂ 晶體厚度的選擇，count06 是控制某範圍的 N_{a0} 的值。Loss 這個參數如果直接關係到可飽和吸收體晶體厚度的選擇，就到 count05 的迴圈再求 delta、 τ_c 、 γ_c 。如果 Loss 這個參數沒有直接關係到可飽和吸收體厚度的選擇，就直接在 count04 的迴圈求 delta、 τ_c 、 γ_c 。count06 的判斷式裡面用了一個 if...elseif...else...end 迴圈，裡面有一個 break 指令。這個指令是用來中斷 for...end 與 while...end 指令的。而一次只能跳出一層的迴圈，而不是跳出所有的迴圈。

while...end：這個指令的用法也是使用邏輯條件來決定是否結束或是繼續迴圈。我們就用主程式裡面的一段有此指令的敘述來說明。

```
y = Y/2;
q = m-10;
while yout(q-1,1)>y
    q = q-10;
end
q = q+1;
while yout(q-1,1)<y
    q = q+1;
end
```

上面的 Y 其實是雷射脈衝最高的光子數的值， m 是這個最高值出現的時間點位置。這幾個敘述句的意思是：把雷射脈衝最高的光子數的值 Y 的一半大小放到 y 參數裡面儲存。把最高值出現的時間點位置往前十點的位置數值儲存到 q 。然後用 `while...end` 指令，如果在由耦合方程式的副程式回傳回來的 $y_{out} = [n(1) \ n(2) \ n(3) \ n(4)]$ 矩陣的第一列第 $q-1$ 個參數的值大於 y ，則把 q 減 10 的值取代原來 q 的值，否則結束這個 `while...end` 迴圈，這樣就可以找到我們想要的誤差範圍內的 q 值。然後把 q 值加 1 點取代原來 q 的值。然後用一次 `while...end` 指令，如果在由耦合方程式的副程式回傳回來的 $y_{out} = [n(1) \ n(2) \ n(3) \ n(4)]$ 矩陣的第一列第 $q-1$ 個參數的值小於 y ，則把 q 加 1 的值取代原來 q 的值，否則結束這個 `while...end` 迴圈，這樣就可以找到我們想要的誤差範圍內的 q 值。所以 `while...end` 指令是符合條件時繼續執行迴圈裡的敘述，否則跳出 `while...end`。

這一節裡面，我只對程式的指令、迴圈執行，以及主副程式的關聯性做分析介紹，然後用我使用的程式敘述做說明的例子。過程之中，其實很多模擬紅寶石雷射使用 $\text{Dy}:\text{CaF}_2$ 可飽和吸收體的參數並沒有詳細介紹它們的物理。這些將會再下一節介紹聯立耦合方程式的物理。

然後後面的兩章將會使用本章所介紹的程式與物理還做模擬研究。另外，如果對程式有興趣的人可以參考後面的附錄。裡面會有更清楚的介紹。此程式由黃滿芳博士寫出初稿，陳鴻銘學長修改加上副程式。最後再由我增加迴圈，修正版本錯誤，才完成今日的版本。如果有興趣研究固態雷射的學者或是想使用 Matlab，可以參考本論文，可以當作一個不錯的練習與參考文獻。

2.4 使用 Matlab 做數值分析

要使用 Matlab 分析紅寶石雷射與被動 Q 開關 Cr:YSO 與 Dy:CaF₂ 的雷射與雙雷射特性。工作的流程是：把一開始的一些設定的參數，例如： σ_g 是雷射放射截面積(單位是 cm^2)， σ_a 是可飽和吸收體基態吸收截面積(單位是 cm^2)等，還有可調變的參數，例如： N_{a0} 是初始 N_a 的值(單位是常數)， R_p 是用光子照射雷射晶體的照射頻率(單位 sec^{-1})，代入主程式。然後主程式在呼叫內建於 Matlab 工具箱中的 ode45 程式去計算手寫的副程式中的三個或四個聯立耦合方程式(rate equations，將在第二章中介紹這些聯立方程式)。然後從副程式回傳幾個重要的數值：按照順序是， t 是 Matlab 所用的時間， n 是雷射共振腔的光子數(單位是常數，四個聯立耦合方程式時，是 $n1$ 與 $n2$)， N_g 是雷射晶體的反轉粒子數(雷射上能階與雷射下能階的電子數的差值，單位是常數)， N_a 是可飽和吸收體基態粒子數(單位是常數)。Loss 不是由副程式傳回的，而是主程式由傳回值帶入計算公式求得的。最後，再由這些傳回值，去計算我們需要的能量變化，半高全寬的變化，還有各種的變化，來分析探討雷射系統的特性。

聯立耦合方程式上幾個符號的意義是： K 是耦合率(電子與光子的碰觸機會，結合率)； γ 是電子的衰變頻率(這裡不是化學中的粒子衰變，而是電子從激態能階離開的頻率，減少的比例)； g 是雷射晶體的代號； a 是可飽和吸收體的代號； β 是電子再激發的比例(單位是常

數)。然後是其他重要的參數， n 是雷射共振腔的光子數(單位是常數)， N_g 是雷射晶體的反轉粒子數(雷射上能階與雷射下能階的電子數的差值，單位是常數)， N_a 是可飽和吸收體基態粒子數(單位是常數)， N_{a0} 是初始 N_a 的值(單位是常數)。

$\gamma_g = 1/\tau_g$ 是雷射上能階的有效衰變頻率(單位是 sec^{-1})， γ_g 是雷射放射生命週期(單位是 sec)， $\gamma_a = 1/\tau_a$ 是有效的可飽和吸收體衰變頻率(單位是 sec^{-1})， τ_a 是可飽和吸收體放射生命週期(單位是 sec)， R_p 是用光子照射雷射晶體的照射頻率(單位是 sec^{-1})， $\gamma_c = 1/\tau_c$ 是共振腔的衰變頻率(單位是 sec^{-1})， τ_c 是共振腔的生命週期(單位是 sec)， $K_a = 2\sigma_a/\tau_r A_a$ 是可飽和吸收體的耦合係數(單位是 sec^{-1})， $K_g = 2\sigma_g/\tau_r A_g$ 是雷射晶體的耦合係數(單位是 sec^{-1})， $K_e = 2\sigma_e/\tau_r A_e$ 是可飽和吸收體當作雷射晶體時的耦合係數(單位是 sec^{-1})， $\beta = \sigma_{\text{ESA}}/\sigma_a$ 是電子再激發的比例(單位是常數)， σ_g 是雷射放射截面積(單位是 cm^2)， σ_a 是可飽和吸收體基態吸收截面積(單位是 cm^2)， σ_e 是可飽和吸收體當作雷射晶體時的雷射放射截面積(單位是 cm^2)， A_g 是有效雷射照射面積(單位是 cm^2)， A_a 是可飽和吸收體被雷射光束照射的面積(單位是 cm^2)， A_e 是可飽和吸收體當作雷射晶體時的有效雷射照射面積(單位是 cm^2)， σ_{ESA} 是可飽和吸收體激態吸收截面積(單位是 cm^2)。

這一節要介紹的重點是，Matlab 如何使用 Runge-Kutta 法來求解副程式中的三個或四個聯立耦合方程式。在這裡我們必須先了解聯立

耦合方程式的物理意義。我們要把這三個或四個聯立耦合方程式中各項與整個方程式的物理意義清楚的表達。三個聯立耦合方程式的分析與四個聯立耦合方程式是相類似，不過還是有相異之處。這裡先把三個聯立耦合方程式列出：

$$dn/dt = K_g N_g n - K_a N_a n - \beta K_a (N_{a0} - N_a) n - \gamma_c n , \quad (1)$$

$$dN_g/dt = R_p - \gamma_g N_g - \gamma K_g N_g n , \quad (2)$$

$$dN_a/dt = \gamma_a (N_{a0} - N_a) - K_a N_a n . \quad (3)$$

第(1)式就是「共振腔中特定波長 n 的光子數的時變率」，等於，「雷射晶體每秒鐘受激放射的光子數」減掉「可飽和吸收體在共振腔中每秒鐘受激吸收的光子數」再減掉「可飽和吸收體激態電子每秒鐘受激再吸收的光子數」再減掉「共振腔中其他所有使此特定波長 n 每秒鐘的光子損失個數」。

其中，

n ：是雷射晶體所放射特定波長的雷射脈衝，在共振腔中的光子數(單位是常數)。

dn/dt ：是雷射晶體所放射特定波長的雷射脈衝，在共振腔中的光子數時變率(單位是 sec^{-1})。

K_g ： $K_g = 2\sigma_g / \tau_r A_g$ 是雷射晶體的耦合係數(單位是 sec^{-1})。

N_g : 是雷射晶體的居量反轉數(雷射上能階與雷射下能階的電子數的差值, 單位是常數)。

$K_g N_g n$: 受激放射項, 雷射晶體受到此特定波長 n 光子的激發, 讓雷射上能階的電子躍遷到雷射下能階。

K_a : $K_a = 2\sigma_a / \tau_r A_a$ 是可飽和吸收體的耦合係數(單位是 sec^{-1})。

N_a : 是可飽和吸收體基態粒子數(單位是常數)。

$K_a N_a n$: 受激吸收項, 可飽和吸收體在共振腔中, 電子吸收雷射晶體特定波長 n 光子躍遷到激態能階的項。

β : $\beta = \sigma_{\text{ESA}} / \sigma_a$ 是電子再激發的比例(單位是常數)。

$(N_{a0} - N_a)$: 是原來可飽和吸收體基態粒子數減去後來可飽和吸收體基態粒子數, 就是「可飽和吸收體激態粒子數」(單位是常數)。

$\beta K_a (N_{a0} - N_a) n$: 是可飽和吸收體激態電子受激再吸收的項。

γ_c : 是共振腔中每秒鐘光子的衰變率(單位是 sec^{-1})。

$\gamma_c n$: 是雷射晶棒所放射特定波長的雷射脈衝, 在共振腔中其他所有使此波長的光子損失的項(單位是 sec^{-1})。

第(2)式就是「雷射晶體的居量反轉數的時變率」, 等於, 「每秒鐘光子照射雷射晶棒使電子激發到雷射上能階的電子數」減掉「雷射晶體的雷射上能階每秒鐘自然放射的電子數」再減掉「雷射晶體受到特定波長 n 光子激發, 每秒鐘受激放射的有效電子數」。

其中，

N_g ：是雷射晶體的居量反轉數(雷射上能階與雷射下能階的電子數的差值，單位是常數)。

dN_g/dt ：是雷射晶體的居量反轉數的時變率(單位是 sec^{-1})。

R_p ：是用光子照射雷射晶體的照射頻率，每秒鐘打中雷射晶棒的光子個數(單位是 sec^{-1})。假設理想情況，是一個光子就可使一個電子躍遷到雷射上能階。

γ_g ：是雷射晶體的雷射上能階的電子有效衰變率(單位是 sec^{-1})。

$\gamma_g N_g$ ：是自然放射項，雷射晶體的雷射上能階的電子，因為在雷射上能階的生命週期到了，所以自然放射光子，躍遷回到基態能階。

γ ：粒子數(電子數)減少的比例，當 $\gamma = 1$ 時，是四階雷射系統；當 $\gamma = 2$ 時，是三階雷射系統。(單位是常數)。

K_g ： $K_g = 2\sigma_g / \tau_r A_g$ 是雷射晶體的耦合係數(單位是 sec^{-1})。

$\gamma K_g N_g n$ ：受激放射項，雷射晶體受到特定波長 n 光子的激發，讓基態的電子躍遷到雷射上能階。但由於是計算居量反轉數，所以當從雷射上能階躍遷一個電子到雷射下能階時，四階雷射的居量反轉數只減少一。但是，如果是三階雷射，居量反轉數是減少二。原因是三階雷射的雷射下能階剛好就是基態的能階。當從雷射上能階躍遷一個電子到雷射下能階時，雷射上能階的總電子數減少一個電子，雷射下能階的總電子數增加一個電子。居量反轉數的算

法是雷射上能階的總電子數減去雷射下能階的總電子數。所以，相較之下，似乎相差了兩個電子，所以有效電子數是兩個電子， $\gamma=2$ 。但是，四階雷射的雷射下能階並不是基態能階，當雷射上能階的一個電子躍遷下來後，這個電子又很迅速的往下面的能階躍遷，所以居量反轉數的計算上，就只有一個電子，所以有效電子數是一個電子， $\gamma=1$ 。

第(3)式就是「可飽和吸收體基態電子數的時變率」，等於，「可飽和吸收體激態每秒鐘自然放射電子數」減掉「可飽和吸收體基態電子吸收雷射晶體特定波長 n 光子每秒鐘受激吸收的電子數」。

其中，

N_a ：是可飽和吸收體基態電子數(單位是常數)。

dN_a/dt ：是可飽和吸收體基態電子數的時變率(單位是 sec^{-1})。

γ_a ：是可飽和吸收體的上能階的電子有效衰變率(單位是 sec^{-1})。

$(N_{a0}-N_a)$ ：是原來可飽和吸收體基態電子數減去後來可飽和吸收體基態電子數，就是「可飽和吸收體激態電子數」(單位是常數)。

$\gamma_a(N_{a0}-N_a)$ ：是自然放射項，可飽和吸收體激態電子數，因為在上能階的生命週期到了，所以自然放射光子，躍遷回到基態能階。

$K_a N_a n$ ：受激吸收項，可飽和吸收體在共振腔中，電子吸收雷射晶體特定波長 n 光子躍遷到激態能階的項。

接下來，我們要定義這個 Q 開關雷射系統，共振腔內光子的損失[7]：

$$Loss = (K_a N_a + \beta K_a (N_{a0} - N_a) + \gamma_c) / K_g \quad (4)$$

現在先假設第(1)式的左式 $dn/dt = 0$ ，這代表每秒鐘共振腔中由受激放射得到的光子數等於每秒鐘由可飽和吸收體與共振腔不完美造成共振腔中減少的光子數。則第(1)式就變成：

$$0 = K_g N_g n - K_a N_a n - \beta K_a (N_{a0} - N_a) n - \gamma_c n, \text{ 下一步則}$$

$$0 = [K_g N_g - K_a N_a - \beta K_a (N_{a0} - N_a) - \gamma_c] n, \text{ 下一步則}$$

$$0 = K_g N_g - K_a N_a - \beta K_a (N_{a0} - N_a) - \gamma_c, \text{ 下一步則}$$

$$K_g N_g = K_a N_a + \beta K_a (N_{a0} - N_a) + \gamma_c, \text{ 最後}$$

$$N_g = (K_a N_a + \beta K_a (N_{a0} - N_a) + \gamma_c) / K_g = Loss$$

這個結果代表 $dn/dt = 0$ 時，雷射的居量反轉數受激放射的光子數完全被可飽和吸收體與共振腔吸收，也就是第(4)式「Q 開關雷射系統共振腔內損失的總光子數」，等於，「可飽和吸收體與共振腔吸收造成的總損失光子數」。

四階的聯立耦合方程式是由陳鴻銘學長為了分析雙雷射系統，在 2001

年，台灣光電科技研討會上發表的四個聯立耦合方程式[8]。這裡我先定義，特定波長 $n1$ 的光子是由原本的雷射晶體所放射出來的光；特定波長 $n2$ 的光子是由可飽和吸收體當作雷射晶體時所放射出來的光。下面就是這四個聯立耦合方程式的分析：

$$dn1/dt = K_g N_g n1 - K_a N_a n1 - \beta K_a (N_{a0} - N_a) n1 - \gamma_{c1} n1, \quad (5)$$

$$dn2/dt = K_e (N_{a0} - N_a) n2 - \gamma_{c2} n2, \quad (6)$$

$$dN_g/dt = R_p - \gamma_g N_g - \gamma K_g N_g n1, \quad (7)$$

$$dN_a/dt = \gamma_a (N_{a0} - N_a) - K_a N_a n1 + K_e (N_{a0} - N_a) n2. \quad (8)$$

第(5)式就是「共振腔中特定波長 $n1$ 的光子數的時變率」，等於，「雷射晶體每秒鐘受激放射的光子數」減掉「可飽和吸收體在共振腔中每秒鐘受激吸收的光子數」再減掉「可飽和吸收體激態電子每秒鐘受激再吸收的光子數」再減掉「共振腔中其他所有使此特定波長 $n1$ 每秒鐘的光子損失個數」。

其中，

$n1$ ：是雷射晶體所放射特定波長的雷射脈衝，在共振腔中的光子數(單位是常數)。

$dn1/dt$ ：是雷射晶體所放射特定波長的雷射脈衝，在共振腔中的光子數時變率(單位是 sec^{-1})。

K_g : $K_g = 2\sigma_g/\tau_r A_g$ 是雷射晶體的耦合係數(單位是 sec^{-1})。

N_g : 是雷射晶體的居量反轉數(雷射上能階與雷射下能階的電子數的差值, 單位是常數)。

$K_g N_g n l$: 受激放射項, 雷射晶體受到此特定波長 $n l$ 光子的激發, 讓雷射上能階的電子躍遷到雷射下能階。

K_a : $K_a = 2\sigma_a/\tau_r A_a$ 是可飽和吸收體的耦合係數(單位是 sec^{-1})。

N_a : 是可飽和吸收體基態粒子數(單位是常數)。

$K_a N_a n l$: 受激吸收項, 可飽和吸收體在共振腔中, 電子吸收雷射晶體特定波長 $n l$ 光子躍遷到激態能階的項。

β : $\beta = \sigma_{ESA}/\sigma_a$ 是電子再激發的比例(單位是常數)。

$(N_{a0} - N_a)$: 是原來可飽和吸收體基態粒子數減去後來可飽和吸收體基態粒子數, 就是「可飽和吸收體激態粒子數」(單位是常數)。

$\beta K_a (N_{a0} - N_a) n l$: 是可飽和吸收體激態電子受激再吸收的項。

γ_{cl} : 是共振腔中每秒鐘特定波長 $n l$ 光子的衰變率(單位是 sec^{-1})。

$\gamma_{cl} n l$: 是雷射晶棒所放射特定波長的雷射脈衝, 在共振腔中其他所有使此波長的光子損失的項(單位是 sec^{-1})。

第(6)式就是「共振腔中特定波長 $n l$ 的光子數的時變率」, 等於, 「可飽和吸收體當作雷射晶體每秒鐘受激放射的光子數」減掉「共振腔中其他所有使此特定波長 $n l$ 每秒鐘的光子損失個數」。

其中，

n_2 ：是可飽和吸收體當作雷射晶體所放射特定波長的雷射脈衝，在共振腔中的光子數(單位是常數)。

dn_2/dt ：是可飽和吸收體當作雷射晶體所放射特定波長的雷射脈衝，在共振腔中的光子數時變率(單位是 sec^{-1})。

K_e ： $K_e = 2\sigma_e/\tau_r A_e$ 是可飽和吸收體當作雷射晶體的耦合係數(單位是 sec^{-1})。

N_{a-up} ： $(N_{a0} - N_a) = N_{a-up}$ 是可飽和吸收體當作雷射晶體，原來可飽和吸收體基態粒子數減去後來可飽和吸收體基態粒子數，當作它的居量反轉數(單位是常數)。

$K_e(N_{a0} - N_a)n_2$ ：受激放射項，可飽和吸收體當作雷射晶體，它的雷射上能階電子受可飽和吸收體當作雷射晶體所放射特定波長 n_2 的光子引誘放出光子的項。

γ_{c2} ：是共振腔中每秒鐘特定波長 n_2 光子的衰變率(單位是 sec^{-1})。

$\gamma_{c2}n_2$ ：是可飽和吸收體當作雷射晶棒所放射特定波長的雷射脈衝，在共振腔中其他所有使此波長的光子損失的項(單位是 sec^{-1})。

第(7)式就是「雷射晶體的居量反轉數的時變率」，等於，「每秒鐘光子照射雷射晶棒使電子激發到雷射上能階的電子數」減掉「雷射晶體的雷射上能階每秒鐘自然放射的電子數」再減掉「雷射晶體受到特定波

長 $n\lambda$ 光子激發，每秒鐘受激放射的有效電子數」。

其中，

N_g ：是雷射晶體的居量反轉數(雷射上能階與雷射下能階的電子數的差值，單位是常數)。

dN_g/dt ：是雷射晶體的居量反轉數的時變率(單位是 sec^{-1})。

R_p ：是用光子照射雷射晶體的照射頻率，每秒鐘打中雷射晶棒的光子個數(單位是 sec^{-1})，假設理想情況，是一個光子就可使一個電子躍遷到雷射上能階。

γ_g ：是雷射晶體的雷射上能階的電子有效衰變率(單位是 sec^{-1})。

$\gamma_g N_g$ ：是自然放射項，雷射晶體的雷射上能階的電子，因為在雷射上能階的生命週期到了，所以自然放射光子，躍遷回到基態能階。

γ ：粒子數(電子數)減少的比例，當 $\gamma = 1$ 時，是四階雷射系統；當 $\gamma = 2$ 時，是三階雷射系統。(單位是常數)。

K_g ： $K_g = 2\sigma_g / \tau_r A_g$ 是雷射晶體的耦合係數(單位是 sec^{-1})。

$\gamma K_g N_g n\lambda$ ：受激放射項，雷射晶體受到特定波長 $n\lambda$ 光子的激發，讓基態的電子躍遷到雷射上能階。

第(8)式就是「可飽和吸收體基態電子數的時變率」，等於，「可飽和吸收體激態每秒鐘自然放射電子數」減掉「可飽和吸收體基態電子吸收雷射晶體特定波長 $n\lambda$ 光子每秒鐘受激吸收的電子數」再加上「可飽和吸收體當作雷射晶體受到特定波長 $n\lambda$ 的光子激發，每秒鐘受激放

射的電子數」。

其中，

N_a ：是可飽和吸收體基態電子數(單位是常數)。

dN_a/dt ：是可飽和吸收體基態電子數的時變率(單位是 sec^{-1})。

γ_a ：是可飽和吸收體的上能階的電子有效衰變率(單位是 sec^{-1})。

$(N_{a0}-N_a)$ ：是原來可飽和吸收體基態電子數減去後來可飽和吸收體基態電子數，就是「可飽和吸收體激態電子數」(單位是常數)。

$\gamma_a(N_{a0}-N_a)$ ：是自然放射項，可飽和吸收體激態電子數，因為在上能階的生命週期到了，所以自然放射光子，躍遷回到基態能階。

$K_a N_a n1$ ：受激吸收項，可飽和吸收體在共振腔中，電子吸收雷射晶體特定波長 $n1$ 光子躍遷到激態能階的項。

K_e ： $K_e = 2\sigma_e/\tau_r A_e$ 是可飽和吸收體當作雷射晶體的耦合係數(單位是 sec^{-1})。

$K_e(N_{a0}-N_a)n2$ ：受激放射項，可飽和吸收體當作雷射晶體，它的雷射上能階電子受可飽和吸收體當作雷射晶體所放射特定波長 $n2$ 的光子引誘放出光子的項。

接下來，我們要定義 Q 開關雙雷射系統，共振腔內光子的損失[7-8]：

$$Loss_{n1} = (K_a N_a + \beta K_a (N_{a0} - N_a) + \gamma_{c1}) / K_g , \quad (9)$$

$$Loss_{n2} = \gamma_{c2} / K_e . \quad (10)$$

現在先假設第(5)式的左式 $dn1/dt = 0$, 這代表每秒鐘共振腔中由雷射晶體受激放射得到特定波長 $n1$ 的光子數 , 等於每秒鐘由可飽和吸收體與共振腔不完美造成共振腔中減少的光子數。則第(5)式就變成 :

$$0 = K_g N_g n1 - K_a N_a n1 - \beta K_a (N_{a0} - N_a) n1 - \gamma_{c1} n1 , \text{ 下一步則}$$

$$0 = [K_g N_g - K_a N_a - \beta K_a (N_{a0} - N_a) - \gamma_{c1}] n1 , \text{ 下一步則}$$

$$0 = K_g N_g - K_a N_a - \beta K_a (N_{a0} - N_a) - \gamma_{c1} , \text{ 下一步則}$$

$$K_g N_g = K_a N_a + \beta K_a (N_{a0} - N_a) + \gamma_{c1} , \text{ 最後}$$

$$N_g = (K_a N_a + \beta K_a (N_{a0} - N_a) + \gamma_{c1}) / K_g = Loss_{n1}$$

這個結果代表 $dn1/dt = 0$ 時 , 雷射的居量反轉數受激放射的光子數完全被可飽和吸收體與共振腔吸收 , 也就是第(9)式「Q 開關雷射系統共振腔內損失的總光子數」, 等於 , 「可飽和吸收體與共振腔吸收造成的總損失光子數」。

現在假設第(6)式的左式 $dn2/dt = 0$, 這代表每秒鐘共振腔中由可飽和

吸收體當作雷射晶體受激放射得到的特定波長 n_2 的光子數，等於每秒鐘由共振腔不完美造成共振腔中減少的光子數。則第(6)式就變成：

$$0 = K_e(N_{a0} - N_a)n_2 - \gamma_{c2}n_2$$

$$0 = [K_e(N_{a0} - N_a) - \gamma_{c2}]n_2$$

$$0 = K_e(N_{a0} - N_a) - \gamma_{c2}$$

$$K_e(N_{a0} - N_a) = \gamma_{c2}$$

$$(N_{a0} - N_a) = \gamma_{c2}/K_e = \text{Loss}_{n_2}$$

這個結果代表 $dn_2/dt = 0$ 時，可飽和吸收體當作雷射晶體的居量反轉數受激放射的光子數完全被共振腔吸收，也就是第(10)式「Q 開關雙雷射系統共振腔內損失特定波長 n_2 的總光子數」，等於，「共振腔吸收造成特定波長 n_2 的總損失光子數」。

參考文獻

- [1] E. Kreyszig, *Advance Engineering Mathematics*, (8th edition), 1992.
- [2] 林丕靜, *數值分析*, 2003.
- [3] G. Lindfield, and J. Penny, *Numerical Methods Using Matlab*, (2nd edition), 1991.
- [4] 張智星, *Matlab 程式設計與應用*, 2001.
- [5] 鄭錦聰, *Matlab 程式設計基礎篇*, 1990.
- [6] Y. K. Kuo, and M. Birnbaum, “Characterics of ruby passive Q switching with a Dy²⁺:CaF₂ solid-state saturable absorber,” *Appl. Opt.* vol. 34, pp. 6829–6833, 1995.
- [7] A. E. Siegman, *Lasers*, (University Science Books, Mill Valley, California), 1986.
- [8] H. M. Chen, and Y. K. Kuo, “Nd:YAG-Cr:YAG 共振腔中 Cr:YAG 被動 Q 開關與雷射效應雙象性之探討,” (台灣光電科技研討會), 2001.

第三章 紅寶石雷射使用 Cr:YSO 與 Dy:CaF₂ 晶體當 做可飽和吸收體之數值分析

3.1 前言

在 1994 年，紅寶石雷射使用被動 Q 開關 Dy:CaF₂ 晶體當作可飽和吸收體[1]。在 1995 年，紅寶石雷射使用被動 Q 開關 Dy:CaF₂ 晶體當作可飽和吸收體，做改變反射鏡反射率與可飽和吸收體的厚度實驗 [2]。在 2001 年，紅寶石雷射使用被動 Q 開關 Cr:YSO 晶體當作可飽和吸收體[3]。論文的本章將要使用這兩個晶體當作紅寶石雷射的可飽和吸收體，然後由前面章節所介紹的聯立耦合方程式，來對這兩個雷射系統做數值的分析。

紅寶石雷射使用被動 Q 開關 Dy:CaF₂ 晶體當作可飽和吸收體的實驗是採用兩組不同厚度的 Dy:CaF₂ 可飽和吸收體，與三組不同輸出反射率的輸出反射鏡。實驗結果所得到的第一個雷射脈衝的能量與雷射脈衝的半高全寬的 12 組數據。我用 Matlab 改寫固態雷射數值模擬程式，讓它獨自完成尋找吻合這些數據的合理參數。紅寶石雷射使用被動 Q 開關 Cr:YSO 可飽和吸收體的部分是為了比較兩種不同可飽和吸收體所得到的脈衝能量與半高全寬，在本章後面會有比較說明。

3.2 紅寶石使用被動 Q 開關做脈衝雷射的數值模擬

紅寶石晶體的化學式是 $\text{Cr}:\text{Al}_2\text{O}_3$ ，是把 Cr^{3+} 離子摻入透明的藍寶石晶體(Al_2O_3)中，產生粉紅色般透明的晶體，所以命名為紅寶石晶體。紅寶石晶體主要有兩個吸收峰值，在 400 nm 與 550 nm。紅寶石雷射的峰值放射截面積為 $\sigma_g = 2.5 \times 10^{-20} \text{ cm}^2$ 。晶體的吸收截面積 (Absorption cross section) 的定義是針對特定能量或波長的光子而言，我們所選定的雷射晶體材料它可以吸收此波長光子，我們用面積的大小來做一個衡量吸收光子能力[4]。從原子物理的角度來看，如參考文獻[4]的內文所說的「截面積大的意思就表示這波長的光子與該晶體的原子有較強的相互作用。它的能量較容易被該原子吸收，用來改變原子的能階，將電子游離或是和周圍的其他粒子交換能量種種物理或化學過程」。同理，放射截面積 (Emission cross section) 的定義也是某晶體當作雷射放射晶體在其特定的雷射光子放射波長，我們用面積的大小來做一個衡量放射光子能力。紅寶石雷射在室溫 25 °C 時的雷射波長是 694.3 nm，電子在雷射上能階的生命週期是 3.0 ms。所以紅寶石雷射也是屬於生命期很長的雷射。紅寶石雷射是屬於三階雷射，它的電子再激發的比例是 $\beta = 0.75$ 。

$\text{Dy}:\text{CaF}_2$ 晶體是正三價的鎘離子還原成二價，然後摻入氟化鈣 (CaF_2) 而得到 $\text{Dy}:\text{CaF}_2$ 晶體。 $\text{Dy}:\text{CaF}_2$ 晶體在波長是 694.3 nm 附近有一個吸收峰值，所以實驗的人員會選擇這個晶體當作紅寶石雷射的可

飽和吸收體也是有道理的。Dy:CaF₂ 晶體的吸收截面積是 $\sigma_a = 1.2 \times 10^{-18} \text{ cm}^2$ 。

Cr:YSO 晶體完整的化學式是 $\text{Cr}^{4+}:\text{Y}_2\text{SiO}_5$ ，是將 Cr^{4+} 摻入 Y_2SiO_5 晶體裡面。Cr:YSO 晶體在 750 nm 地方有一個吸收峰值，所以可以當作 Cr:LiCAF 固態雷射的可飽和吸收體，吸收截面積 $\sigma_a = 7.0 \times 10^{-19} \text{ cm}^2$ 。當 Cr:YSO 晶體當作雷射晶體時，它的放射光譜範圍是在 1000 nm 到 1500 nm 的地方，峰值在 1250 nm。室溫 25 °C 時，電子在雷射上能階的生命週期大約是 0.7 μs 。

3.3 紅寶石使用被動 Q 開關做脈衝雷射的數值模擬

在前面的章節已經提到了 Dy:CaF₂ 與 Cr:YSO 兩個可飽和吸收體與紅寶石的特性。Dy:CaF₂ 晶體[5–7]在液態氮溫度下，也有 2.36 μm 的脈衝或是連續波的放射現象。但在室溫之下，Dy:CaF₂ 晶體因為產生雷射的臨界值很高，所以幾乎無法產生雷射。但是把 Dy:CaF₂ 晶體當成紅寶石雷射的被動 Q 開關是可行的，這在實驗中[1,2]已經得到證實，因為 Dy:CaF₂ 晶體的吸收頻帶剛好與紅寶石雷射的紅光放射峰值 694.3 nm 很接近。

固態雷射如果使用固態的可飽和吸收體當作被動 Q 開關，可以說是一種用來產生很窄的時間範圍與很高的功率的雷射脈衝，而且很經濟的裝置[8–17]。在之前實驗的文章裡[2]，使用 Dy:CaF₂ 晶體當作紅寶石雷射的被動 Q 開關，共振腔的長度是 27 cm 長，裡面包含了一個平面高反射率的反射鏡與一個平面耦合輸出鏡。兩個 Dy:CaF₂ 晶體(分別是 8 與 15 mm 厚度，兩面皆是磨平沒有鍍膜)和三個在波長 694 nm 時，反射率分別為 78%、84%與 89%的平面耦合輸出鏡。這些都使用在被動 Q 開關實驗裝置中。這個紅寶石雷射被動 Q 開關實驗結果是雷射脈衝的半高全寬大約是 100 ns 與 5.7 mJ 的脈衝能量，這是使用 15 mm 厚度的 Dy:CaF₂ 晶棒當可飽和吸收體與使用 78%的平面耦合輸出鏡所得到的結果。然後使用 84%與 89%的平面耦合輸出鏡所得到的脈衝能量分別是 4.8 mJ 與 3.8 mJ。而當替換了不同反射率

的平面耦合輸出鏡之後，雷射脈衝的半高全寬似乎也沒有什麼太大的變動，雷射脈衝的半高全寬也大約是 100 ns。當紅寶石雷射使用 8 mm 厚度的 Dy:CaF₂ 晶棒當可飽和吸收體被動 Q 開關與使用 78% 的平面耦合輸出鏡所得到的結果是，雷射脈衝的半高全寬大約是 150 ns 與 2.6 mJ 的脈衝能量。然後使用 84% 與 89% 的平面耦合輸出鏡所得到的脈衝能量分別是 2.2 mJ 與 1.8 mJ。而當替換了不同反射率的平面耦合輸出鏡之後，雷射脈衝的半高全寬似乎也沒有什麼太大的變動，雷射脈衝的半高全寬也大約是 150 ns。接下來，使用微分方程式中的朗奇-庫塔-費爾柏格方法來解聯立耦合方程式，具體的找出可飽和吸收體基態粒子數初始值 N_{a0} 。輸出耦合鏡的反射率 R 與 R_p 是用光子照射雷射晶體的照射頻率。

第一個 Cr:YSO 晶體的分光研究從 77K 到 257 K 在 1992 年由 Deka 等人所研究[17]。在 1993 年，Cr:YSO 晶體的室溫研究已經由 Kück 等人所發表，而 Cr:YSO 晶體在室溫下有一個很強的吸收峰值 695 nm 的地方。Cr:YSO 晶體的被動 Q 開關所放射的螢光隨著紅寶石雷射的光照而增強，也隨著紅寶石雷射脈衝的消失而做指數的衰減。從螢光的放射圖，我們可以推出 Cr:YSO 晶體的室溫放射生命期是 0.7 μ s，這也與一個指數函數的圖形相吻合。這個生命期夠長可以和雷射脈衝的半高全寬相較，所以 Cr:YSO 晶體被分類成慢速釋放激態電子的可飽和吸收體。

紅寶石雷射在峰值波長 694 nm 的放射截面積是 2.5×10^{-20} cm²。

這個數字本質上會小於可飽和吸收體 Dy:CaF₂ 晶體在波長 694 nm 的吸收截面積， $1.2 \times 10^{-18} \text{ cm}^2$ 。因此根據被動 Q 開關尺寸的判斷，我們可以猜想的到可飽和吸收體 Dy:CaF₂ 晶體當作紅寶石雷射的被動 Q 開關不需要在加上內部的聚焦動作。我們使用(1)–(3)的聯立耦合方程式做數值模擬，使用朗奇–庫塔方法來解可飽和吸收體 Dy:CaF₂ 晶體當作紅寶石雷射的被動 Q 開關的雷射輸出行為。其他我使用在模擬的參數有：雷射波長 694.3 nm、雷射共振腔長度 27 cm、有效雷射光束直徑 2 mm、電子的衰變頻率 $\gamma = 2$ 、紅寶石雷射晶體的放射截面積 $\sigma_g = 2.5 \times 10^{-20} \text{ cm}^2$ 、Dy:CaF₂ 可飽和吸收體晶體的吸收截面積 $\sigma_a = 1.2 \times 10^{-18} \text{ cm}^2$ 、光子照射雷射晶體的照射頻率 $R_p = 1.2 \times 10^{21} \text{ sec}^{-1}$ 、共振腔的衰變頻率 $\gamma_c = 3.39 \times 10^8 \text{ sec}^{-1}$ 、雷射上能階的有效衰變頻率 $\gamma_g = 3.33 \times 10^2 \text{ sec}^{-1}$ 、有效的可飽和吸收體衰變頻率 $\gamma_a = 6.67 \times 10^3 \text{ sec}^{-1}$ 、雷射晶體的耦合係數 $K_g = 8.84 \times 10^{-10} \text{ s}^{-1}$ 、可飽和吸收體的耦合係數 $K_a = 4.24 \times 10^{-8} \text{ s}^{-1}$ 、電子再激發的比例 $\beta = 0.75$ 。當可飽和吸收體使用 15 mm 厚度的 Dy:CaF₂ 晶棒，可飽和吸收體基態粒子數初始值 $N_{a0} = 3.86 \times 10^{15}$ ；使用 8 mm 厚度的 Dy:CaF₂ 晶棒，可飽和吸收體基態粒子數初始值 $N_{a0} = 2.06 \times 10^{15}$ 。紅寶石雷射使用厚度 15 mm 與 8 mm Dy:CaF₂ 晶棒，做被動 Q 開關雷射模擬的輸出能量(包含整個被動 Q 開關的雷射脈衝)與半高全寬分別可以在圖 3.1 與圖 3.2 看到。當使用 78%、84%與 89%的平面耦合輸出鏡反射率時，這輸出能量與半高全

寬模擬的結果十分的接近實驗的結果。

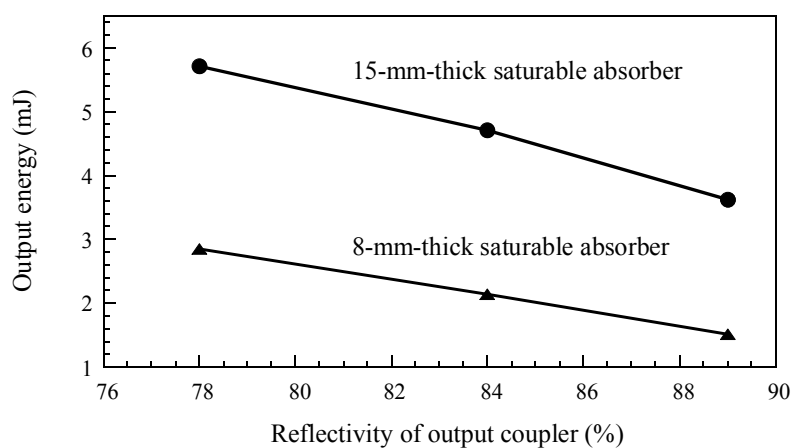


圖 3.1、模擬厚度 8 與 15 mm 的 Dy:CaF₂ 被動 Q 開關可飽和吸收體脈衝雷射的輸出能量。

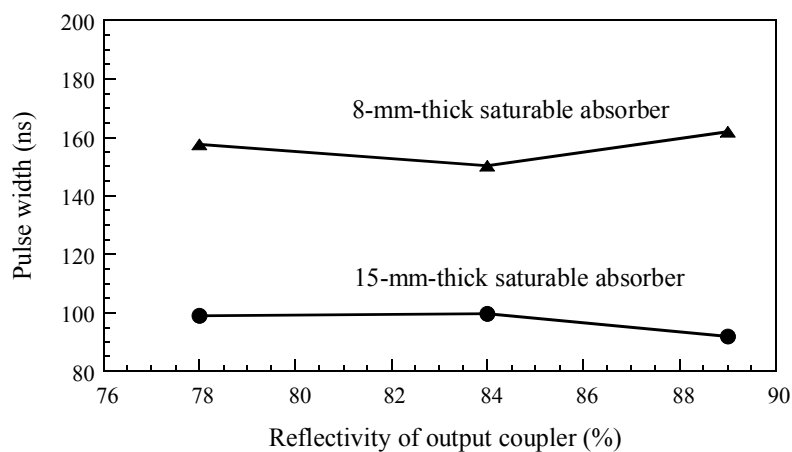


圖 3.2、模擬厚度 8 與 15 mm 的 Dy:CaF₂ 被動 Q 開關可飽和吸收體脈衝雷射的脈衝寬度。

Cr:YSO 晶體的透明效應(Bleaching effect)是由 Hughes Aircraft 公

司的 Robert D. Stultz 用電光的 Q 開關在紅寶石雷射峰值波長 694 nm 測量到脈衝的寬度大約是 20 ns。這個紅寶石雷射的光束的極化方向是平行 Cr:YSO 晶體的 n_3 的方向，傳播方向是朝著 Cr:YSO 晶體的 n_2 的方向，很接近是直徑 1.4 mm 的高斯圖形。

由實驗得到的 Cr:YSO 晶體的可飽和吸收體晶體的吸收截面積 $\sigma_a = 7.0 \times 10^{-19} \text{ cm}^2$ 和可飽和吸收體激態吸收截面積 $\sigma_{\text{ESA}} = 2.3 \times 10^{-19} \text{ cm}^2$ ，把 α 當成 0 忽略。注意在波長 694 nm 時，紅寶石雷射的放射截面積是 $2.5 \times 10^{-20} \text{ cm}^2$ ，這與 Cr:YSO 晶體的可飽和吸收體晶體的吸收截面積在相同的波長下比起來小很多。因此根據被動 Q 開關尺寸的判斷，我們可以猜想的到可飽和吸收體 Cr:YSO 晶體當作紅寶石雷射的被動 Q 開關不需要在加上內部的聚焦的透鏡裝置。

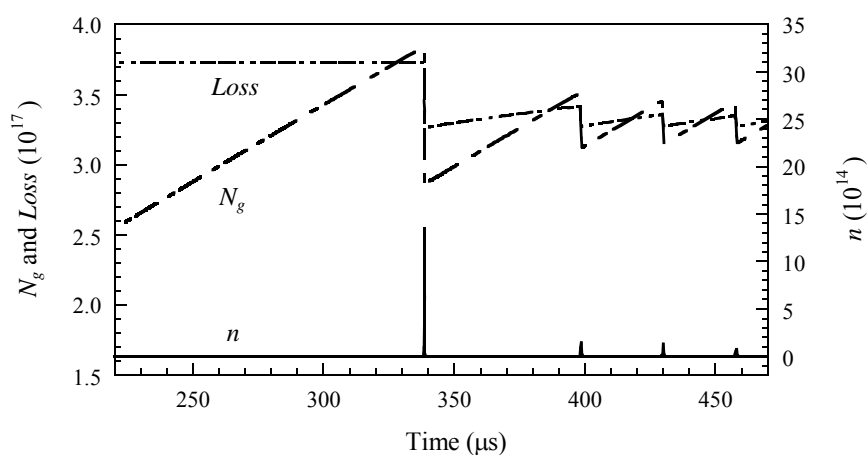


圖 3.3、當可飽和吸收體 Dy:CaF₂ 基態粒子數初始值 $N_{a0} = 3.86 \times 10^{15}$ ，平面耦合輸出鏡反射率使用 78%， $R_p = 1.2 \times 10^{21} \text{ s}^{-1}$ 時，時間對 N_g 、 $Loss$ 和 n 函數圖。

使用可飽和吸收體被動 Q 開關 Dy:CaF₂ 晶體的紅寶石雷射的動態特性，可以從圖 3.4 觀察的到。圖 3.4 是圖 3.3 在第一個雷射脈衝附近的放大圖。圖 3.4 裡面的可飽和吸收體被動 Q 開關雷射計算出的能量與脈衝寬度分別是 5.7 mJ 與 99 ns。

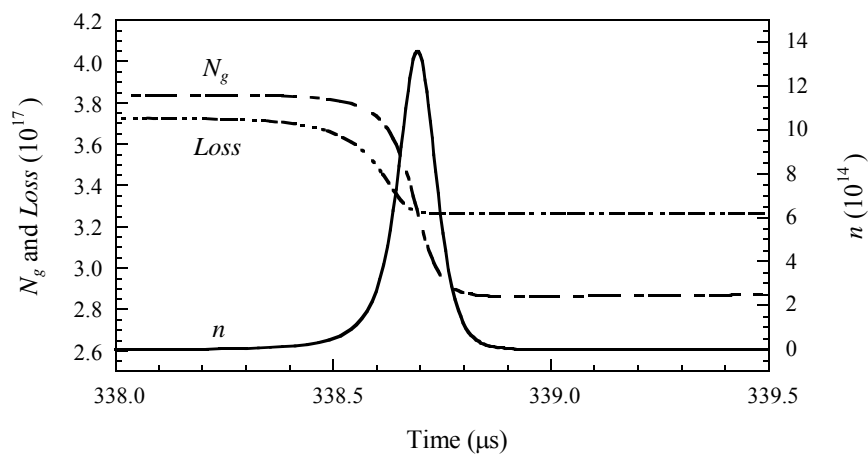


圖 3.4、這是圖 3.3 在第一個雷射脈衝附近的放大圖。

在圖 3.4 中，當共振腔中的光子數增加時，光子損失也相對的減少，這是可飽和吸收體被動 Q 開關 Dy:CaF₂ 晶體的透明效應(Bleaching effect)產生的結果。雷射產生所需要的粒子反轉數大約是 3.83×10^{17} 。當雷射共振腔裡面的反轉粒子數等於光子的損失時，也就是當 $N_g = Loss \cong 3.27 \times 10^{17}$ 時，Q 開關雷射共振腔裡面的光子數達到極大值 1.36×10^{15} 。經過極大值這點之後，雷射系統的增益就會小於雷射系統的總損失了，而且，Q 開關雷射的脈衝會很迅速的衰減，直到粒子反

轉數的值漸漸的減少到一個極小值 2.86×10^{17} 。在雷射上能階的電子被釋放到雷射下能階之後 Q 開關雷射的光子損失增加，是因為可飽和吸收體的粒子數也釋放。使用可飽和吸收體 Cr:YSO 晶體當作紅寶石雷射的被動 Q 開關有比 Dy:CaF₂ 晶體更好動態特性，可以從圖 3.5 看到。

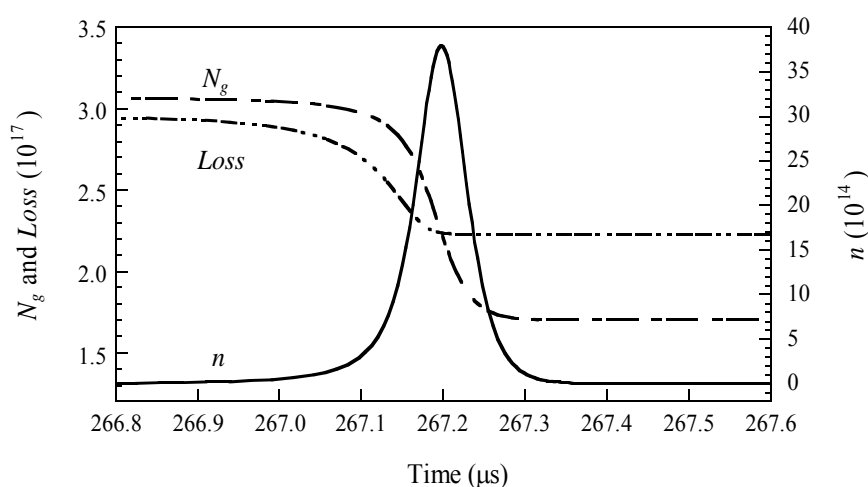


圖 3.5、當可飽和吸收體 Cr:YSO 基態粒子數初始值 $N_{a0} = 3.86 \times 10^{15}$ ，平面耦合輸出鏡反射率使用 78%， $R_p = 1.2 \times 10^{21} \text{ s}^{-1}$ 時，時間對 N_g 、 $Loss$ 和 n 函數第一個雷射脈衝附近的放大圖。

從圖 3.5 被動 Q 開關雷射的雷射脈衝能量與脈衝寬度分別是 11.7 mJ 和 73.6 ns。從圖 3.5 裡面，當雷射共振腔裡面的光子數增加，光子損失也就相對減少，這也是因為可飽和吸收體 Cr:YSO 晶體的透明效應產生的結果。雷射產生所需要的反轉粒子數大約是 3.06×10^{17} 。當雷射反轉粒子數等於共振腔裡面的光子損失，也就是 $N_g = Loss =$

2.23×10^{17} ，在雷射共振腔裡面的光子數的極大值大約是 3.79×10^{15} 。

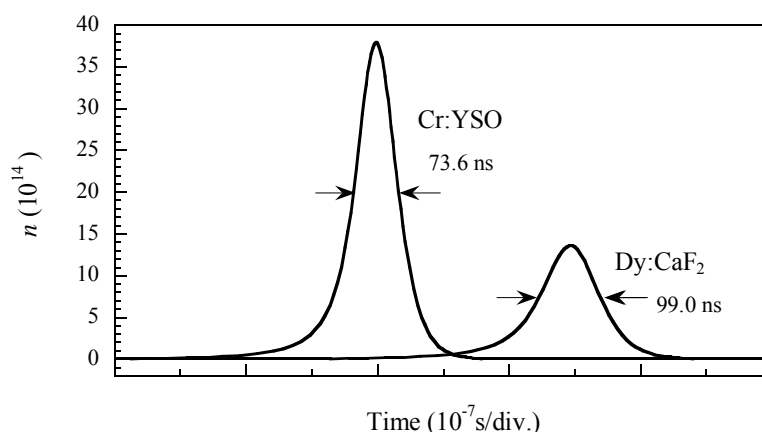


圖 3.6、Cr:YSO 與 Dy:CaF₂ 兩種可飽和吸收體使用紅寶石晶體的被動 Q 開關雷射的第一個雷射脈衝能量的比較圖。

圖 3.6 裡面，是把兩種可飽和吸收體 Dy:CaF₂ 晶體與 Cr:YSO 晶體，當作紅寶石雷射的被動 Q 開關所產生的雷射脈衝的脈衝放大圖，畫在一起。圖 3.7 是使用可飽和吸收體 Dy:CaF₂ 晶體當作紅寶石雷射的被動 Q 開關，當輸出反射鏡的反射率 $R = 78\%$ ，光子照射雷射晶體的照射頻率 $R_p = 1.2 \times 10^{21} \text{ s}^{-1}$ 時，以可飽和吸收體基態粒子數初始值 N_{a0} 為變數所得到的雷射脈衝能量與脈衝寬度的函數圖形。這個模擬的結果很清楚的說明了比較好的可飽和吸收體在其他相同的條件下會有較大的基態粒子數初始值 N_{a0} ，例如：如果使用一個厚度比較厚的可飽和吸收體或者是摻雜濃度比較高的可飽和吸收體就會有較高的基態粒子數初始值 N_{a0} 。值得注意的是，雖然使用一個厚度比較厚

的可飽和吸收體或者是摻雜濃度比較高的可飽和吸收體就會有較高的基態粒子數初始值 N_{a0} ，但也得花費比較久的時間來產生巨大的雷射脈衝。

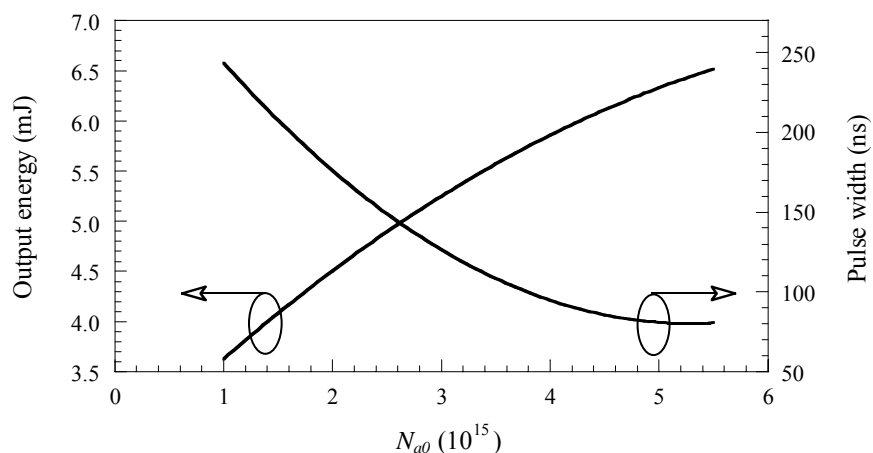


圖 3.7、當可飽和吸收體 Dy:CaF₂ 平面耦合輸出鏡反射率使用 78%， $R_p = 1.2 \times 10^{21} \text{ s}^{-1}$ 時， N_{a0} 對輸出能量與脈衝寬度的圖形。

圖 3.8 說明了使用 Dy:CaF₂ 晶體當作紅寶石雷射的被動 Q 開關，當輸出反射鏡的反射率 $R = 78\%$ ，光子照射雷射晶體的照射頻率 $R_p = 1.2 \times 10^{21} \text{ s}^{-1}$ 時，以可飽和吸收體基態粒子數初始值 N_{a0} 為變數所得到的第一個與第二個雷射脈衝所需時間的函數圖形。由被動 Q 開關的定理來說明，一個較大的 N_{a0} 值的被動 Q 開關雷射脈衝所花的時間較長，是因為可飽和吸收體有比較高的光子損失，還有輸出耦合鏡有較低的反射率，這是因為欠缺一個高反射率的輸出耦合鏡產生了更高的光子損失。

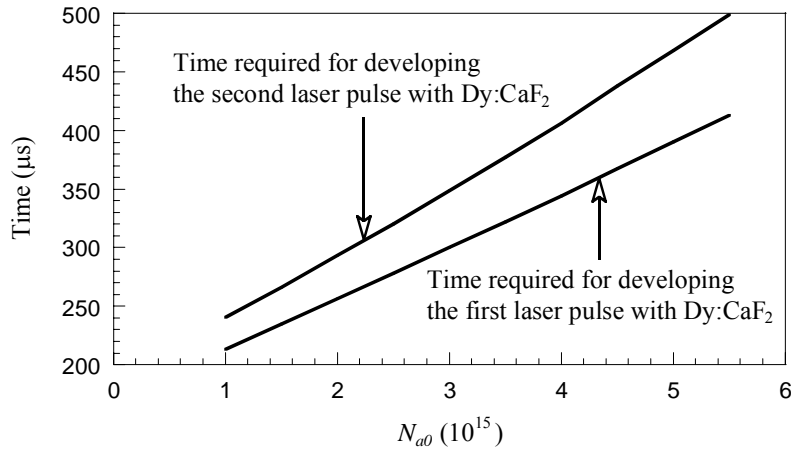


圖 3.8、當可飽和吸收體 Dy:CaF₂ 平面耦合輸出鏡反射率使用 78% , $R_p = 1.2 \times 10^{21} \text{ s}^{-1}$ 時 , N_{a0} 對第一個雷射脈衝與第二個雷射脈衝出現時間的圖形。

圖 3.9 是使用可飽和吸收體 Dy:CaF₂ 晶體當作紅寶石雷射的被動 Q 開關 , 當光子照射雷射晶體的照射頻率 $R_p = 1.2 \times 10^{21} \text{ s}^{-1}$, 基態粒子數初始值 $N_{a0} = 3.86 \times 10^{15}$ 時 , 以輸出反射鏡的反射率 R 為變數所得到的雷射脈衝能量與脈衝寬度的函數圖形。當輸出耦合鏡的反射率開始增加則輸出的雷射脈衝能量與脈衝寬度開始下降。當輸出耦合鏡的反射率很高時 , 雷射脈衝能量變的很小 , 特別是輸出耦合鏡的反射率很接近 100% 的時候 , 因為雷射輸出能量直接跟輸出耦合鏡的反射率有關。

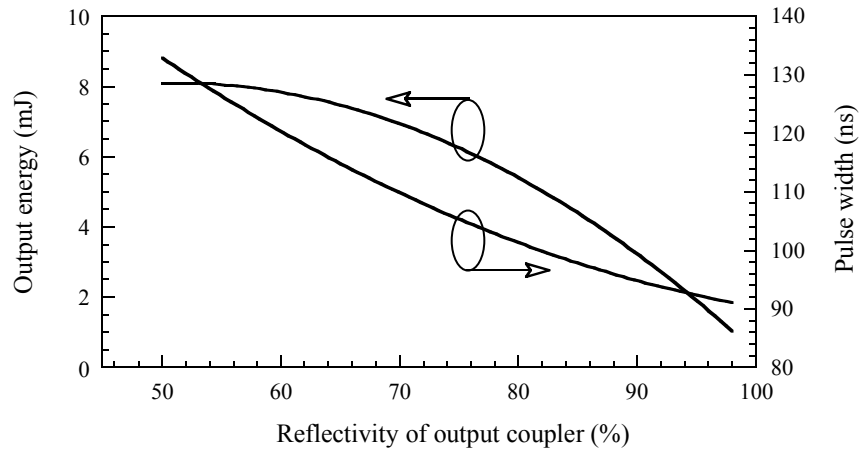


圖 3.9 當可飽和吸收體 Dy:CaF₂ 使用 $N_{a0} = 3.86 \times 10^{15}$, $R_p = 1.2 \times 10^{21} \text{ s}^{-1}$ 時，平面耦合輸出鏡反射率 R 對輸出能量與脈衝寬度的圖形。

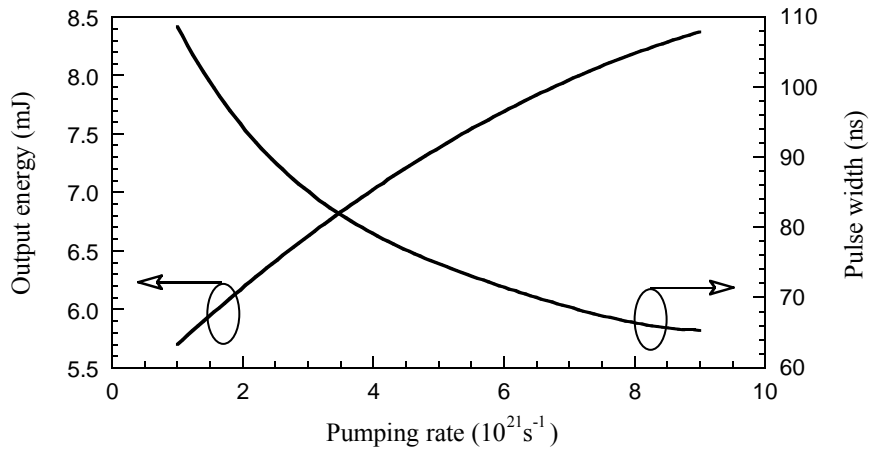


圖 3.10、當可飽和吸收體 Dy:CaF₂ 平面耦合輸出鏡反射率使用 78%， $N_{a0} = 3.86 \times 10^{15}$ 時， R_p 對輸出能量與脈衝寬度的圖形。

圖 3.10 是使用可飽和吸收體 Dy:CaF₂ 晶體當作紅寶石雷射的被動 Q 開關，當輸出反射鏡的反射率 $R = 78\%$ ，基態粒子數初始值 $N_{a0} =$

3.86×10^{15} 時，以光子照射雷射晶體的照射頻率 R_p 為變數所得到的雷射脈衝能量與脈衝寬度的圖形。由圖 3.10 可以觀察出一個比較好的被動 Q 開關裝置是使用比較高的光子照射雷射晶體的照射頻率。一個比較典型的例子是，當輸出反射鏡的反射率 $R = 78\%$ ，基態粒子數初始值 $N_{a0} = 3.86 \times 10^{15}$ 時，光子照射雷射晶體的照射頻率 $R_p = 6.0 \times 10^{21} \text{ s}^{-1}$ 時，它的雷射脈衝能量與脈衝寬度分別是 7.7 mJ 和 70 ns。

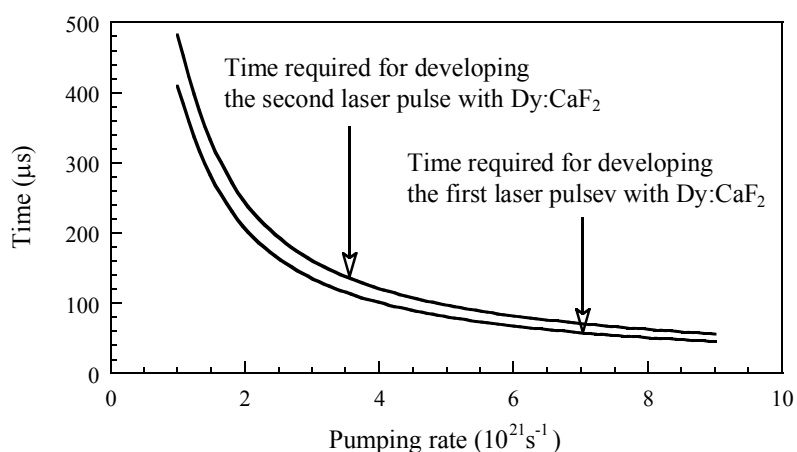


圖 3.11、當可飽和吸收體 Dy:CaF_2 平面耦合輸出鏡反射率使用 78%， $N_{a0} = 3.86 \times 10^{15}$ 時， R_p 對第一個雷射脈衝與第二個雷射脈衝出現時間的圖形。

圖 3.11 是使用可飽和吸收體 Dy:CaF_2 晶體當作紅寶石雷射的被動 Q 開關，當輸出反射鏡的反射率 $R = 78\%$ ，基態粒子數初始值 $N_{a0} = 3.86 \times 10^{15}$ 時，以光子照射雷射晶體的照射頻率 R_p 為變數所得到的第一個與第二個雷射脈衝所需時間的圖形。有較高的光子照射雷射晶體

的照射頻率，雷射脈衝出現的時間就會比較短。很明顯的，從圖 3.11 推論，當光子照射雷射晶體的照射頻率 R_p 小於 $3.0 \times 10^{21} \text{ s}^{-1}$ 時，第一個與第二個雷射脈衝所需時間明顯的都比較短。

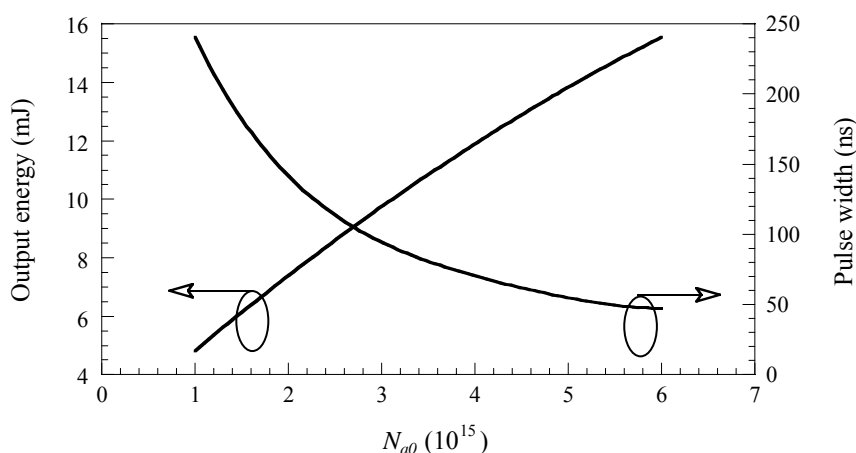


圖 3.12、當可飽和吸收體 Cr:YSO 平面耦合輸出鏡反射率使用 78% , $R_p = 1.2 \times 10^{21} \text{ s}^{-1}$ 時， N_{a0} 對輸出能量與脈衝寬度的圖形。

圖 3.12 是使用可飽和吸收體晶體 Cr:YSO 當作紅寶石雷射的被動 Q 開關，當輸出反射鏡的反射率 $R = 78\%$ ，光子照射雷射晶體的照射頻率 $R_p = 1.2 \times 10^{21} \text{ s}^{-1}$ 時，以可飽和吸收體基態粒子數初始值 N_{a0} 為變數所得到的雷射脈衝能量與脈衝寬度的圖形。

圖 3.13 是當輸出反射鏡的反射率 $R = 78\%$ ，基態粒子數初始值 $N_{a0} = 3.86 \times 10^{15}$ 時，使用可飽和吸收體 Dy:CaF₂ 晶體當作紅寶石雷射的被動 Q 開關的脈衝雷射的第一個雷射脈衝與使用可飽和吸收體晶體 Cr:YSO 當作紅寶石雷射的被動 Q 開關的雷射的第一個雷射脈衝的

圖形。

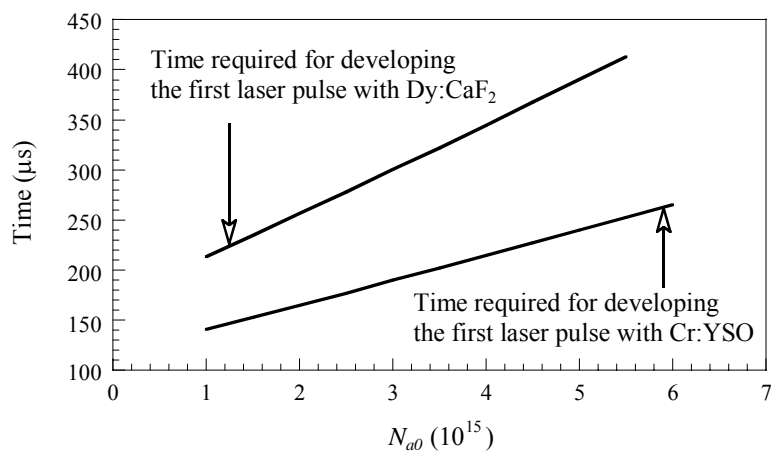


圖 3.13、當可飽和吸收體 Cr:YSO 與 Dy:CaF₂ 平面耦合輸出鏡反射率使用 78% , $R_p = 1.2 \times 10^{21} \text{ s}^{-1}$ 時 , N_{a0} 對第一個雷射脈衝出現時間的比較圖形。

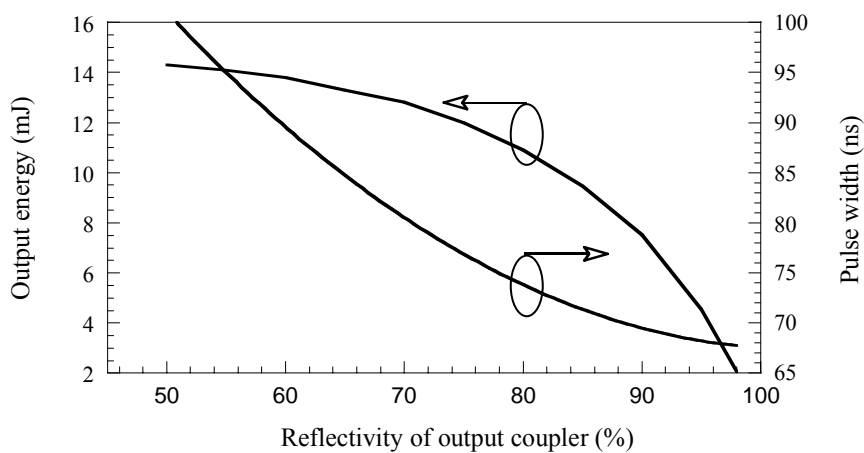


圖 3.14、當可飽和吸收體 Cr:YSO 使用 $N_{a0} = 3.86 \times 10^{15}$, $R_p = 1.2 \times 10^{21} \text{ s}^{-1}$ 時 , 平面耦合輸出鏡反射率 R 對輸出能量與脈衝寬度的圖形

圖 3.14 是使用可飽和吸收體晶體 Cr:YSO 當作紅寶石雷射的被動 Q 開關，當光子照射雷射晶體的照射頻率 $R_p = 1.2 \times 10^{21} \text{ s}^{-1}$ ，基態粒子數初始值 $N_{a0} = 3.86 \times 10^{15}$ 時，以輸出反射鏡的反射率 R 為變數所得到的雷射脈衝能量與脈衝寬度的函數圖形。當輸出耦合鏡的反射率開始增加則輸出的雷射脈衝能量與脈衝寬度開始下降。當輸出耦合鏡的反射率很高時，雷射脈衝能量變的很小，特別是輸出耦合鏡的反射率很接近 1 的時候，因為雷射輸出能量直接跟輸出耦合鏡的反射率有關。

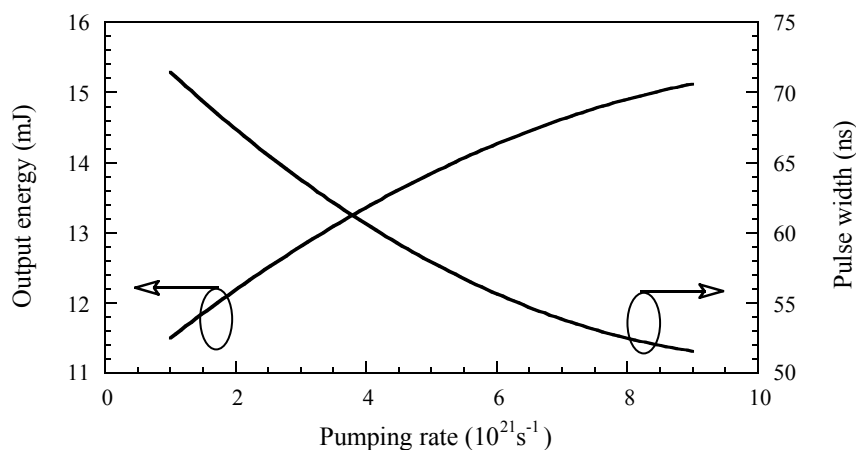


圖 3.15、當可飽和吸收體 Cr:YSO 平面耦合輸出鏡反射率使用 78%， $N_{a0} = 3.86 \times 10^{15}$ 時， R_p 對輸出能量與脈衝寬度的圖形。

圖 3.15 是使用可飽和吸收體晶體 Cr:YSO 當作紅寶石雷射的被動 Q 開關，當輸出反射鏡的反射率 $R = 78\%$ ，基態粒子數初始值 $N_{a0} = 3.86 \times 10^{15}$ 時，以光子照射雷射晶體的照射頻率 R_p 為變數所需時間與雷射脈衝能量與脈衝寬度的函數圖形。圖 3.16 是使用可飽和吸收體

晶體 Dy:CaF₂ 與 Cr:YSO 當當作紅寶石雷射的被動 Q 開關，當輸出反射鏡的反射率 $R = 78\%$ ，基態粒子數初始值 $N_{a0} = 3.86 \times 10^{15}$ 時，以光子照射雷射晶體的照射頻率 R_p 為變數，第一個雷射脈衝所需時間的函數圖形。

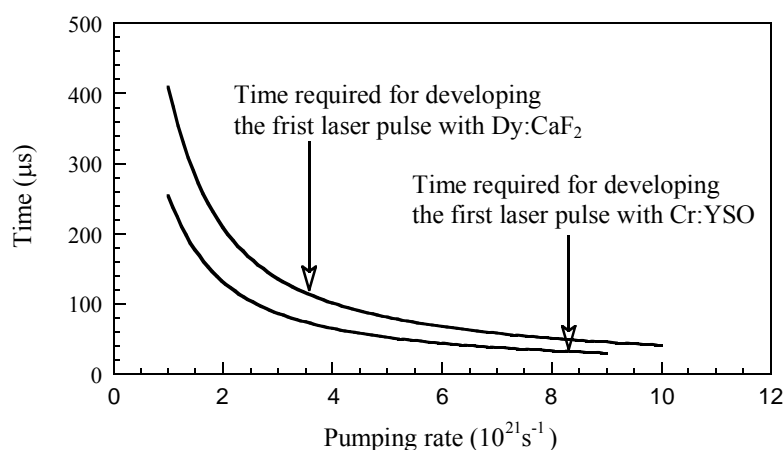


圖 3.16、當可飽和吸收體 Cr:YSO 與 Dy:CaF₂ 平面耦合輸出鏡反射率使用 78% ， $N_{a0} = 3.86 \times 10^{15}$ 時， R_p 對第一個雷射脈衝出現時間的比較圖形。

圖 3.17 是使用可飽和吸收體晶體 Dy:CaF₂ 與 Cr:YSO 當作紅寶石雷射的被動 Q 開關，當輸出反射鏡的反射率 $R = 78\%$ ，基態粒子數初始值 $N_{a0} = 3.86 \times 10^{15}$ 時，以光子照射雷射晶體的照射頻率 R_p 為變數，雷射脈衝能量的圖形。

圖 3.18 是使用可飽和吸收體晶體 Dy:CaF₂ 與 Cr:YSO 當作紅寶石雷射的被動 Q 開關，當輸出反射鏡的反射率 $R = 78\%$ ，基態粒子數初

始值 $N_{a0} = 3.86 \times 10^{15}$ 時，以光子照射雷射晶體的照射頻率 R_p 為變數，雷射脈衝寬度的圖形。

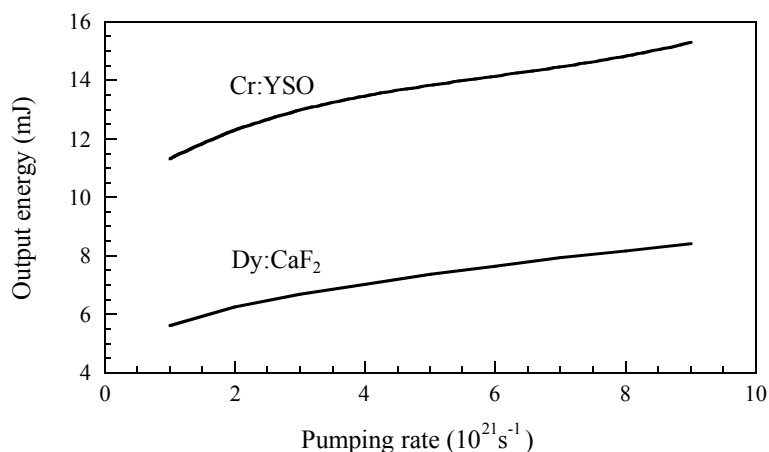


圖 3.17、當可飽和吸收體 Cr:YSO 與 Dy:CaF₂ 平面耦合輸出鏡反射率使用 78%， $N_{a0} = 3.86 \times 10^{15}$ 時， R_p 對輸出能量的圖形。

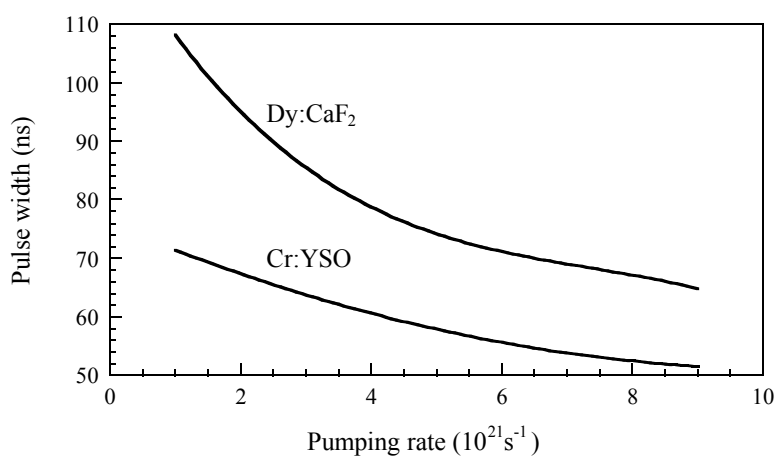


圖 3.18、當可飽和吸收體 Cr:YSO 與 Dy:CaF₂ 平面耦合輸出鏡反射率使用 78%， $N_{a0} = 3.86 \times 10^{15}$ 時， R_p 對輸出能量的圖形。

圖 3.19 是使用可飽和吸收體晶體 Dy:CaF₂ 與 Cr:YSO 當作紅寶石雷射的被動 Q 開關，當輸出反射鏡的反射率 $R = 78\%$ ，光子照射雷射晶體的照射頻率 $R_p = 1.2 \times 10^{21} \text{ s}^{-1}$ ，以基態粒子數初始值 N_{a0} 為變數，雷射脈衝能量的函數圖形。

圖 3.20 是使用可飽和吸收體晶體 Dy:CaF₂ 與 Cr:YSO 當作紅寶石雷射的被動 Q 開關，當輸出反射鏡的反射率 $R = 78\%$ ，光子照射雷射晶體的照射頻率 $R_p = 1.2 \times 10^{21} \text{ s}^{-1}$ ，以基態粒子數初始值 N_{a0} 為變數，雷射脈衝寬度的圖形。

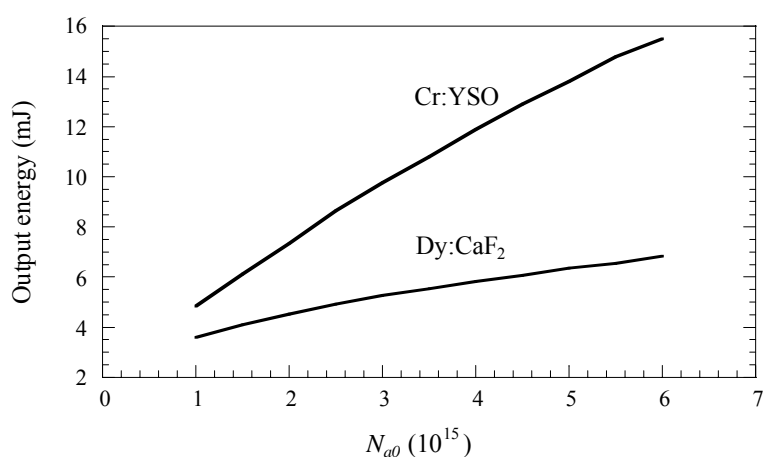


圖 3.19、當可飽和吸收體 Cr:YSO 與 Dy:CaF₂ 平面耦合輸出鏡反射率使用 78%， $R_p = 1.2 \times 10^{21} \text{ s}^{-1}$ 時， N_{a0} 對輸出能量的圖形。

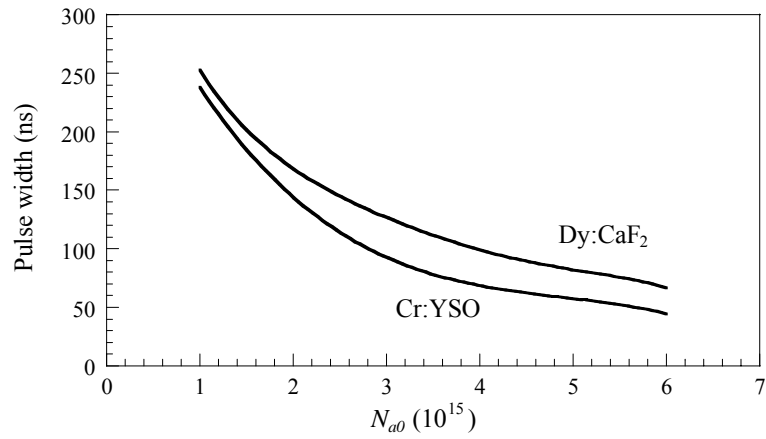


圖 3.20、當可飽和吸收體 Cr:YSO 與 Dy:CaF₂ 平面耦合輸出鏡反射率使用 78% , $R_p = 1.2 \times 10^{21} \text{ s}^{-1}$ 時 , N_{a0} 對脈衝寬度的圖形。

參考文獻

- [1] Y. K. Kuo, W. Chen, R. D. Stultz, and M. Birnbaum, “Dy²⁺:CaF₂ saturable-absorber Q switch for the ruby laser,” *Appl. Opt.*, vol. 33, pp. 6348–6351, 1994.
- [2] Y. K. Kuo, and Milton Birnbaum, “Characterics of ruby passive Q switching with a Dy²⁺:CaF₂ solid-state saturable absorber,” *Appl. Opt.* vol. 34, pp. 6829–6833, 1995.
- [3] Y. K. Kuo, Homg-Min Chen, and Jih-Yuan Chang, “Numerical study of the Cr:YSO Q-switched ruby laser,” *Opt. Eng.* vol. 40, pp. 2031–2035, 2001.
- [4] 易台生, 2001 年 10 月, “一個簡單的原子物理實驗——光吸收實驗”, 物理雙月刊, 第 23 卷, 第 5 期, 第 554 至 559 頁.
- [5] R. J. Pressley, and J. P. Wittke, “CaF₂:Dy²⁺ Lasers,” *IEEE J. Quantum Electron*, vol. QE-3, NO. 3, pp. 116–129, 1967.
- [6] J. Z. Kiss, “Energy levels of Dy²⁺ in the cubic hosts of CaF₂, SrF₂, and BaF₂,” *Phys. Rev. A*, vol. 137, pp. 1749–1760, 1965.
- [7] J. Z. Kiss, C. H. Anderson, and R. Orbach, “Zeeman effect studies of the ⁵I₇–⁵I₈ transition in CaF₂:Dy²⁺,” *Phys. Rev. A*, vol. 137, pp. 1761–1766, 1965.
- [8] M. I. Demchuk, V. P. Mikhailov, N. I. Zhavoronkov, N. V. Kuleshov, P. V. Prokoshin, K. V. Yumashev, M. G. Livshits, and B. I. Minkov, “Chromium-doped forsterite as a solid-state a

- saturable-absorber,” *Opt. Lett.*, vol. 17, NO. 13, pp. 929–930, 1992.
- [9] K. Spariosu, R. D. Stultz, and M. Birnbaum, “Er:Ca₅(PO₄)₃F saturable-absorber Q switch for the Er:glass laser at 1.53 μm,” *Appl. Phys. Lett.*, vol. 62, pp. 2763–2765, 1993.
- [10] E. Munin, A. B. Villaverde, X. X. Zhang, and M. Bass, “Broadband, intensity dependent absorption in tetravalent chromium-doped crystals,” *Appl. Phys. Lett.*, vol. 63, pp. 1734–1741, 1993.
- [11] R. D. Stultz, M. B. Camargo, S. T. Montgomery, M. Birnbaum, and K. Spariosu, “U⁴⁺:SrF₂ efficient saturable absorber Q switch for the 1.54 μm erbium:glass laser,” *Appl. Phys. Lett.*, vol. 64, pp. 948–950, 1994.
- [12] Y. K. Kuo, M. Birnbaum, and W. Chen, “Ho:YLiF₄ saturable absorber Q-switch for the 2-μm Tm,Cr:Y₃Al₅O₁₂ laser,” *Appl. Phys. Lett.*, vol. 65, pp. 3060–3062, 1994.
- [13] M. B. Camargo, R. D. Stultz, M. Birnbaum, M. Kokta, “Co²⁺:YSGG saturable absorber Q switch for infrared erbium lasers,” *Opt. Lett.*, vol. 20, pp. 339–341, 1995.
- [14] Y. K. Kuo, M. F. Huang, and M. Birnbaum, “Tunable Cr⁴⁺:YSO Q-switched Cr:LiCAF laser,” *IEEE J. Quantum Electron.*, vol. QE–31, pp. 657–663, 1995.
- [15] Y. K. Kuo, and M. Birnbaum, “Ho:YVO₄ solid-state saturable absorber Q switch for 2-μm Tm,Cr:Y₃Al₅O₁₂ laser,” *Appl. Opt.*, vol.

- 35, pp. 881–884, 1996.
- [16] Y. K. Kuo, M. Birnbaum, F. Unlu, and M. F. Huang, “Ho:CaF₂ solid-state saturable absorber Q-switch for the 2- μ m Tm,Cr:Y₃Al₅O₁₂ laser,” *Appl. Opt.*, vol. 35, pp.2576–2579, 1996.
- [17] C. Deka, B. H. T. Chai, Y. Shimony, X. X. Zhang, E. Munin and M. Bass, “Laser performance of Cr⁴⁺:Y₂SiO₅,” *Appl. Phys. Lett.*, vol. 61, pp.2141–2143, 1992.

第四章 雙雷射系統的數值模擬

4.1 前言

雙雷射系統的研究，在實驗上，由 K. Spariosu，在南加州大學所做的實驗[1]。他採用 Nd:YAG 晶體當作固態雷射的主要發射雷射脈衝的晶體。然後使用 Cr:YAG 晶體做為可飽和吸收體與第二個雷射脈衝的雷射晶體。所發出的雷射光波長分別是 1064 nm 與 1440 nm。然後在數值模擬的方面，是由彰化師範大學物理系的學生陳鴻銘。他在 2001 年，台灣光電科技研討會上發表的四個聯立耦合方程式[2]。這四個方程式可以很完整的描述這雙雷射系統的特性。

我在論文的第四章的第二節裡，採用陳鴻銘學長的四個聯立耦合方程式用 Matlab 做數值模擬，來分析 Nd:YAG-Cr:YAG 雙雷射系統。在之前鴻銘學長就有對這雙雷射系統做過分析，張詒安學長也有過探討，這個部分我只做稍稍的補充與加上自己的想法。第四章的第三節裡，我採用由 Rapaport 與 Xiao 等人在 2002 年對 Nd:YAG-Cr:YAG 所做的被動 Q 開關實驗測量結果與 Michael Bass 等人在 2003 年對前者結果做數值公式推算分析結果。藉此模擬分析在變溫之下 Nd:YAG-Cr:YAG 的被動 Q 開關雙雷射系統。

4.2 Nd:YAG-Cr:YAG 雙雷射系統分析

使用發光波長在 $1.064 \mu\text{m}$ 的 Nd:YAG 固態雷射，可以看見很多的應用。因為 Nd:YAG 固態雷射的功率，都比一般如紅寶石雷射的三階雷射好。使用 Cr:YAG 晶體做為 Nd:YAG 固態雷射的可飽和吸收體 [3]，是一個很不錯的組合。Q 開關雷射晶體，當摻入不同離子之後可以作為特定雷射晶體的可飽和吸收體 [4]，可以用在不同的用途上 [6–8]。一般的 Q 開關雷射晶體，都是由可飽和吸收體當成高損失的吸收光子晶體。當可飽和吸收體飽和之後，雷射晶體的特定發光波長的光子才能在共振腔裡面共振放大，當累積到足夠的居量反轉術後，受激放射出雷射光。但這都是由雷射晶體母體在發光，例如，Nd:YAG-Cr:YAG 的 Q 開關雷射系統，就只有由 Nd:YAG 發出 $1.064 \mu\text{m}$ 的雷射脈衝，Cr:YAG 晶體卻不發光。不過，Cr:YAG 晶體其實也是可以放出雷射光的 [5]。

K. Spariosu 等人在南加州大學所做的實驗 [1]。他用了兩組耦合平面鏡。一組是設定讓波長 $1.064 \mu\text{m}$ 的光子有 65% 反射率的輸出耦合鏡。另一組是設定讓波長 $1.440 \mu\text{m}$ 的光子有 98% 反射率的輸出耦合鏡。因為可飽和吸收體 Cr:YAG 當作雷射晶體所發出的光功率並不強，所以不用較高的反射率的反射鏡無法使此波長的光共振。Spariosu 等人經由實驗得到的結果，確實不僅僅只有 Nd:YAG 發出 $1.064 \mu\text{m}$ 的雷射脈衝。在 $1.064 \mu\text{m}$ 的雷射脈衝出現後，大約 700 ns 後亦可相

繼產生 1440 nm 雷射脈衝[9]。

Spariosu 等人雖然於實驗上發現此一現象，但卻未對此一特殊雷射現象做理論數值的分析探討。在理論上，原本用來描述 Q 開關雷射系統的三個聯立耦合方程式，似乎不足以完全描述雙雷射脈衝的物理機制。而彰化師範大學物理系的學生陳鴻銘經由指導教授的指導，提出了四個聯立耦合方程式來解釋這個物理現象。這四個聯立耦合方程式在第二章中我們已經提過，現在利用數值模擬方式來分析探討 Cr:YAG 晶體使用於 Nd:YAG 雷射系統中，產生被動 Q 開關與雷射效應之雙象性。

在我對 Nd:YAG-Cr:YAG Q 開關雷射系統的研究報告中，所設定的參數值分別如下：雷射共振腔長度為 30 cm、雷射輸出耦合鏡在波長為 1.064 μm 與 1.440 μm 的反射率為 65%與 98%、 $\sigma_g = 3.3 \times 10^{-19} \text{ cm}^2$ 、 $\sigma_a = 3.0 \times 10^{-18} \text{ cm}^2$ 、 $\sigma_e = 4.0 \times 10^{-19} \text{ cm}^2$ 、 $K_g = 1.1 \times 10^{-8} \text{ s}^{-1}$ 、 $K_a = 9.5 \times 10^{-8} \text{ s}^{-1}$ 、 $K_e = 1.1 \times 10^{-8} \text{ s}^{-1}$ 、 $\gamma_{c1} = 1.8 \times 10^8 \text{ s}^{-1}$ 、 $\gamma_{c2} = 7.4 \times 10^7 \text{ s}^{-1}$ 、 $\gamma_g = 4.3 \times 10^3 \text{ s}^{-1}$ 、 $\gamma_a = 2.3 \times 10^5 \text{ s}^{-1}$ 、 $\beta = 0.067$ 、 $R_p = 1.1 \times 10^{21} \text{ s}^{-1}$ 、和 $N_{a0} = 1.25 \times 10^{16}$ 。

其中圖4.1所示為1.064 μm 雷射光隨時間變化情形；當第一個雷射脈衝產生之前，損失 $Loss_{n1}$ 約維持在一個固定值，當居量反轉 N_g 持續增加而高於損失時，可飽和吸收體相對於光子而言會變成透明，因此大量的光子數在此一瞬間同時釋放，系統的居量反轉與損失 $Loss_{n1}$ 便因此而急劇下降，雷射共振腔內的光子數 $n1$ 急遽增加，於是產生第

一個1.064 μm 雷射光脈衝；而在雷射脈衝產生之後，居量反轉並不為零，換句話說激發系統仍舊持續將基態電子趕至雷射上能階，所以雷射上能階依然持續累積電子等待下一次雷射脈衝產生。

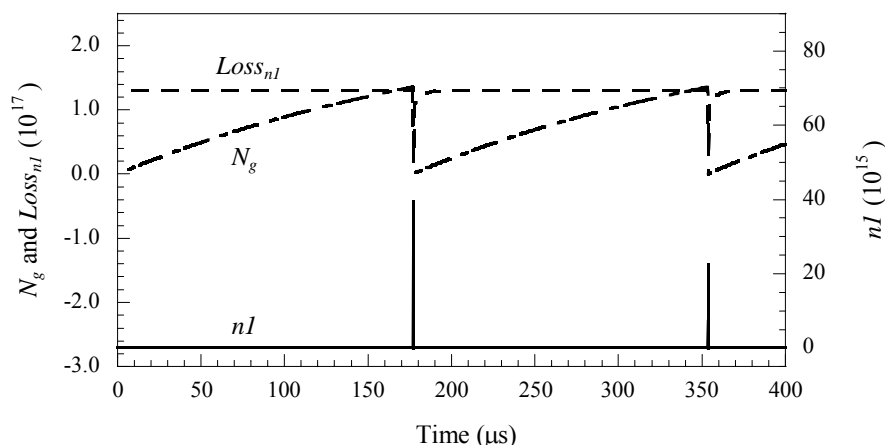


圖4.1、1064 nm雷射光之增益 N_g 、損失 $Loss_{nl}$ 及光子數 nl 對時間的關係圖。

圖4.2所示為可飽和吸收體Cr:YAG同時扮演雷射晶體角色而發出波長為1.064 μm 的雷射光，其中雷射增益的居量反轉為 $N_{a-up} = (N_{a0} - N_a)$ ，而損失 $Loss_{n2}$ 維持在一固定值；當Cr:YAG晶體受激發時，在瞬間達到飽和狀態下，增益 N_{a-up} 會遠大於損失 $Loss_{n2}$ ，Cr:YAG雷射上能階大量的電子會受激躍遷至雷射下能階而產生雷射脈衝。在產生雷射脈衝的過程中，值得注意的是Cr:YAG雷射晶體的激發來源是Nd:YAG晶體所產生的1.064 μm 雷射光，而且是脈衝式的激發，與一

般雷射穩定的激發速率有所不同，因此其脈衝輸出能量可以想見是比 1064 nm 脈衝能量小許多。

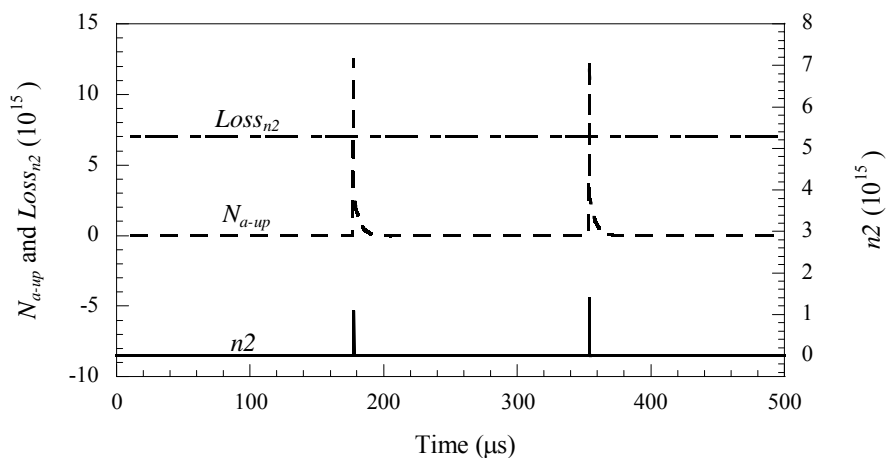


圖4.2、1440 nm雷射光之增益 N_{a-up} 、損失 $Loss_{n2}$ 及光子數 $n2$ 對時間的關係圖。

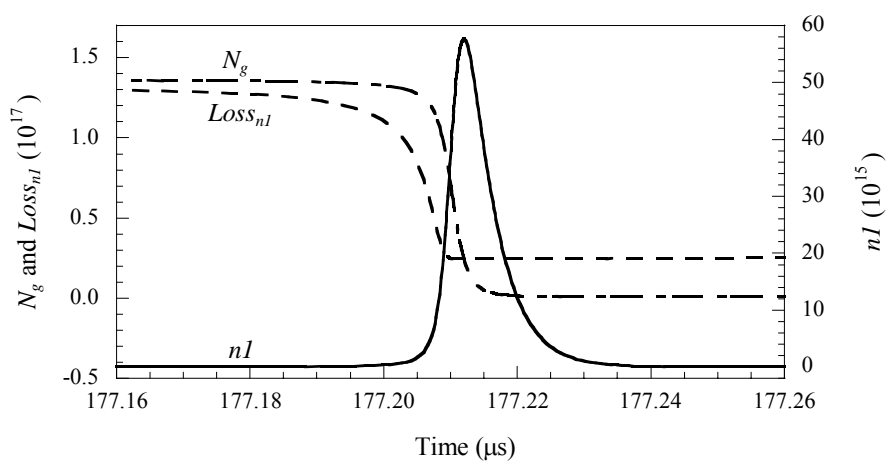


圖 4.3、1064 nm 之第一個雷射脈衝附近放大圖。

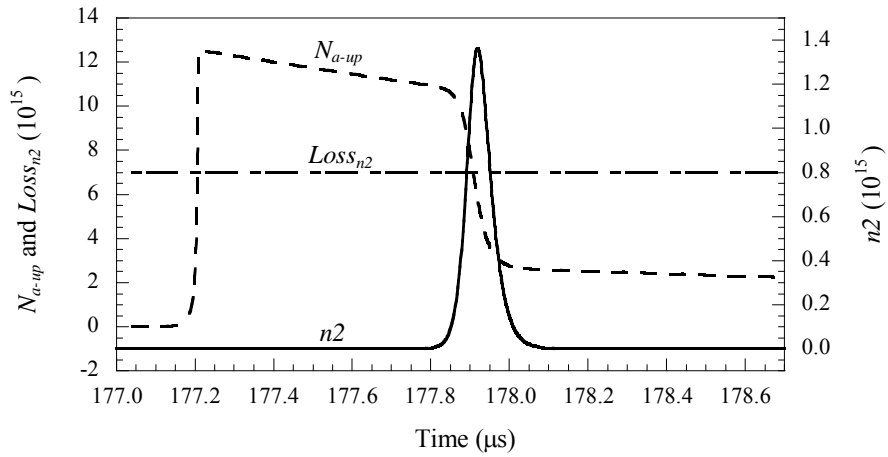


圖 4.4、1440 nm 之第一個雷射脈衝附近放大圖。

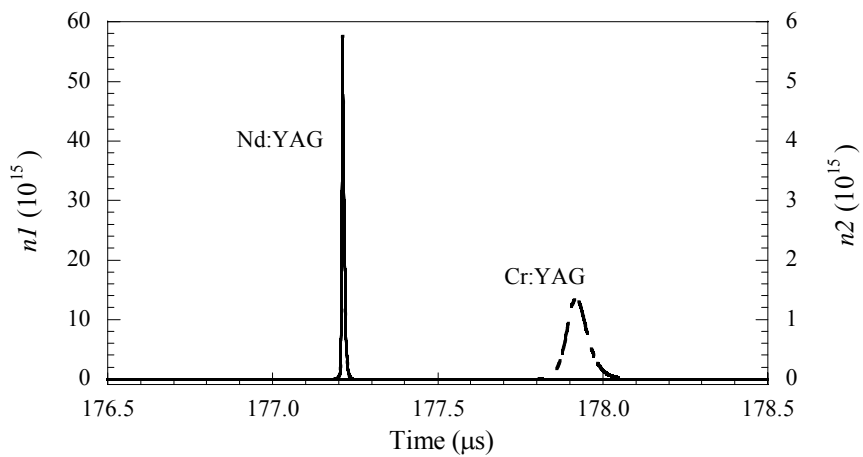


圖 4.5、1064 nm 雷射脈衝出現後約 700 ns 也可以看見 1440 nm 雷射脈衝。

由 K. Spariosu 等人做的實驗得到的結果是 1064 nm 雷射脈衝寬度與輸出能量為 35 ns 與 15 mJ, 1440 nm 雷射脈衝寬度與輸出能量為 200 ns 與 0.15 mJ。而且雷射脈衝出現的時間上，當 1064 nm 雷射脈

衝出現後約 700 ns 也可以看見 1440 nm 雷射脈衝。我用模擬的方式得到的結果是 1064 nm 雷射脈衝輸出能量與 1440 nm 雷射脈衝輸出能量分別為 15.3 mJ 與 0.15 mJ。脈衝寬度雖然不是很接近於實驗值，不過也可以從模擬上得到 1440 nm 雷射脈衝寬度大約是當 1064 nm 雷射脈衝寬度的七倍。而且模擬的結果也是 1064 nm 雷射脈衝出現後約 706 ns 也可以看見 1440 nm 雷射脈衝，可以說很接近實驗的結果。

從圖 4.3 與圖 4.4 可以看到 1064 nm 雷射脈衝與 1440 nm 雷射脈衝第一個雷射脈衝附近的放大圖。兩個雷射脈衝都可以看到當居量反轉數等於損失時，產生的光子數達到最高。1064 nm 雷射脈衝最高的光子數是 6.5×10^{16} ，1440 nm 雷射脈衝的最高光子數是 1.4×10^{15} 個光子。

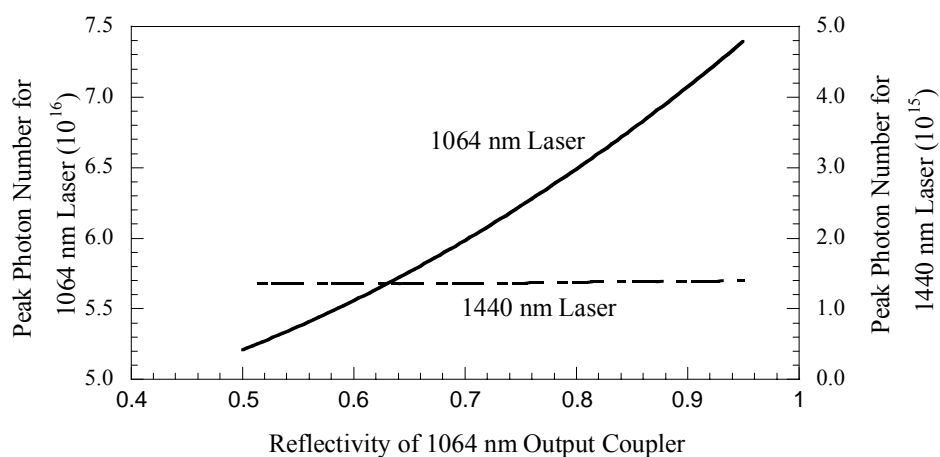


圖 4.6、1064 nm 波長的輸出耦合鏡的反射率對 1064 nm 與 1440 nm 雷射脈衝的最高光子數的關係圖。

圖 4.5 是 1064 nm 與 1440 nm 雷射脈衝圖形。圖 4.6 為雷射脈衝波峰光子數與雷射輸出在波長 1064 nm 的反射率。1064 nm 波長的反射鏡反射率的增加，1064 nm 波長的峰值光子數也隨之變大。但是 1440 nm 雷射脈衝的最高光子數卻沒有有太大的變化。這個現象在之前已經被陳鴻銘與張詒安學長解釋過[2]，他們覺得是因為原本的可飽和吸收體 Cr:YAG 當成雷射晶體時，它的雷射上能階居量反轉數就是 $N_{a-up} = N_{a0} - N_a$ 而初始基態粒子數 N_{a0} 就算全部激發到雷射上能階當成 Cr:YAG 雷射晶體的增益，也已經達到最高值。這個情況已經屬於飽和，自然 1440 nm 雷射脈衝的最高光子數不會在增加。

可是我的看法不同，如果我們改變的是 1440 nm 雷射的輸出反射鏡反射率。可以從圖 4.7 發現 1440 nm 雷射脈衝最高光子數會隨著這個波長的反射鏡反射率增加而增加，表示反射率越高有幫助光子在共振腔中共振產生巨大雷射脈衝的效果。當然我們也發現這時 1064 nm 波長的雷射光的雷射脈衝最高光子數幾乎不隨這反射率增加而有太大的改變，這就沒有可飽和吸收體基態粒子數有極大值的問題存在。我覺得這只是單純反射鏡對特定波長有加強與減弱共振效應。

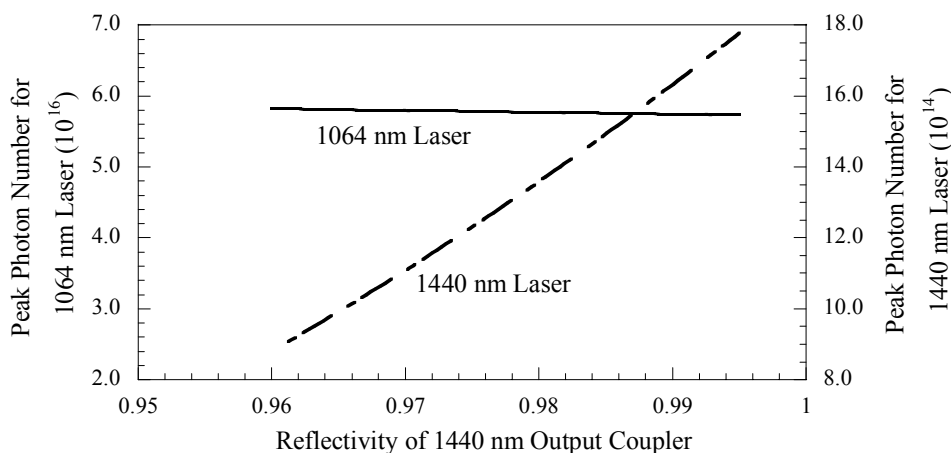


圖 4.7、1440 nm 波長的輸出耦合鏡的反射率對 1064 nm 與 1440 nm 雷射脈衝的最高光子數的關係圖。

所以由圖 4.6，應該是 1440 nm 波長的光子沒有受到 1064 nm 特定波長反射鏡反射率的影響，所以光子數沒有什麼太大的變化。同樣的，圖 4.7，應該是 1064 nm 波長的光子沒有受到 1440 nm 特定波長反射鏡反射率的影響，所以光子數沒有什麼太大的變化。

雙雷射的應用上，我們一樣可以設計成美容手術上或是物體切割上的運用。雙雷射系統可以產生不同波長，能量相差十倍以上的兩個雷射脈衝。而且兩個雷射脈衝出現的時間間隔幾乎不變。我們利用這個特性來設計雷射。在切割的設計上，我們可以讓能量較大的雷射脈衝用作切割用，能量小的雷射脈衝當作測量用。例如，設計一個裝置可以再一開始的時候擋住 1064 nm 波長的雷射脈衝而透過 1440 nm 波長的雷射脈衝。而需要切割的地方因為所畫的線跟沒有畫線的區域反

射回來的訊號不同，當測量的波長打在切割線上就打開擋住 1064 nm 波長的裝置，讓 1064 nm 波長的雷射脈衝來切割用。當 1440 nm 波長的雷射脈衝反射回來的訊號不是在線上時，就關閉擋住 1064 nm 波長雷射脈衝的裝置。

4.3 Nd:YAG-Cr:YAG 雙雷射系統的變溫模擬分析

過往的固態雷射分析上，都是忽略溫度對系統的影響。其實這樣的做法並沒有太大的不妥，因為通常在科學研究上需要忽略某參數的影響時，通常是因為這各參數對此時的系統影響不大，而在可以解省時間與資源的情況下，有效率的得到想要的結果。但這不代表這些被忽略的參數一直都不重要。例如，半導體雷射在目前的研究下，是不能不考慮量子的效應的，因為電子光電元件的體積越來越小，長度的尺度上越來越小，所以像是量子井或是量子點的效應都一一出現。同樣的，溫度的考量上，半導體雷射或是高亮度 LED 因為體積很小，散熱不容易，所以元件的熱效應研究就變的很重要。我所做的固態雷射相較於半導體元件，體積大很多加上熱效應[10–13]的影響不大，雷射在工作中不容易因為熱效應而產生類似效率極速變差、雷射光的紅位移或甚至元件燒毀的事情發生，所以大家才會很希望有耐高溫的元件[14]。不過，我們依舊可以對固態雷射做溫度變化時，某些特性的分析探討。

在 2003 年，Michael Bass 等人做固態雷射變溫的分析[15]，他們先假設在雷射晶體的吸收截面積是共振腔中的溫度的唯一函數。由實驗與數值計算他們做出的結論是主動式的 Q 開關的固態雷射，輸入的能量固定成常數的情況時，輸出能量隨著溫度增加而減少。如果主動式的 Q 開關的固態雷射，能量由放大光譜放射限制隨溫度變化的

情況時，輸出能量隨著溫度增加而增加。被動 Q 開關的固態雷射的情況時，輸出能量也是隨著溫度增加而增加。他們所使用的被動 Q 開關的固態雷射系統是使用 Nd:YAG 與 Nd:GSGG 當成雷射晶體，然後使用 Cr:YSO 當成可飽和吸收體。從圖 4.8 [15]可看出 Nd:YAG-Cr:YAG 被動 Q 開關雷射的輸出能量隨著溫度上升而效能變好。

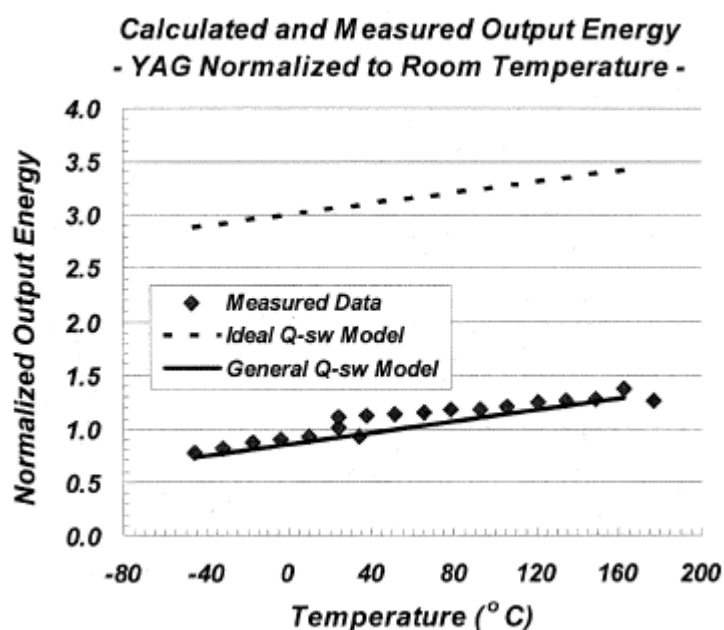


圖 4.8 變化溫度時所得到 Nd:YAG-Cr:YAG 被動 Q 開關雷射的輸出能量關係。

在 Nd:YAG-Cr:YAG 的系統中，雷射的放射截面積假設與共振腔成只與溫度有關，它們的線性關係是 $d\sigma_g/dT = -3.72 \times 10^{-22} \text{ cm}^2/\text{K}$

[15,16]，其中 T 是溫度參數。從圖 4.9 [15,16]它們變化溫度從-233 K 增加到 433 K，Nd:YAG 晶體的放射截面積從 $3.1 \times 10^{-19} \text{ cm}^2$ 縮小至 $2.3 \times 10^{-19} \text{ cm}^2$ 的大小。

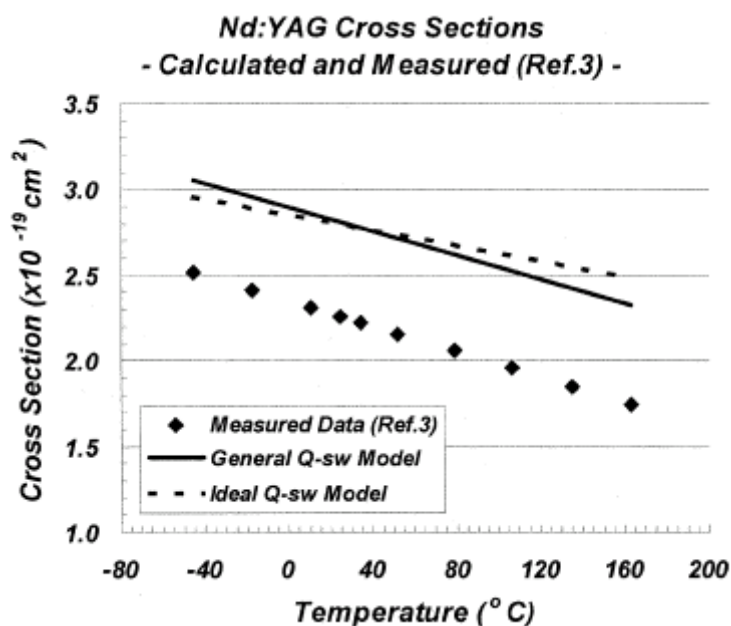


圖 4.9、變化溫度時所得到 Nd:YAG 的放射截面積變化關係圖。

我取溫度的變化範圍從-243 K 增加到 423 K。也就是 Nd:YAG 晶體的放射截面積從 $3.09 \times 10^{-19} \text{ cm}^2$ 縮小至 $2.50 \times 10^{-19} \text{ cm}^2$ 做線性變化，做以下的模擬分析。因為如果這個 Nd:YAG-Cr:YAG 的系統也發出雙雷射時，Cr:YAG 當成雷射晶體的放射截面積在同一個共振腔裡面，相同的道理下，預測一樣會因為溫度的上升而變小。不過，因為參考文獻[15]與[16]並沒有用公式推導與測量 Cr:YAG 的雷射的放射截面積與溫度變化關係，所以只能用假設的方式來設定 Cr:YAG 的放射截

面積隨溫度的變化範圍。Cr:YAG 晶體在室溫下的放射截面積是 $\sigma_g = 3.3 \times 10^{-19} \text{ cm}^2$ [17]。從參考文獻[18]，亞歷山大雷射(Alexandrite Laser)在溫度 300K 測量到的雷射放射截面積是 $7 \times 10^{-21} \text{ cm}^2$ ，在溫度 475K 測量到的雷射放射截面積是 $2 \times 10^{-20} \text{ cm}^2$ 。溫度上升 175K，吸收截面積約放大了 3 倍。這主要的原因是因為亞歷山大雷射的雷射上能階粒子數增加，但因為溫度升高使得粒子處於高能階的生命期而變短，這也是亞歷山大放射截面積變大的原因。所以亞歷山大雷射適合於高溫操作，在高溫下有比低溫時更好的性能。這可以從圖 4.10 [18]看出亞歷山大雷射的有效放射截面積與溫度的關係。

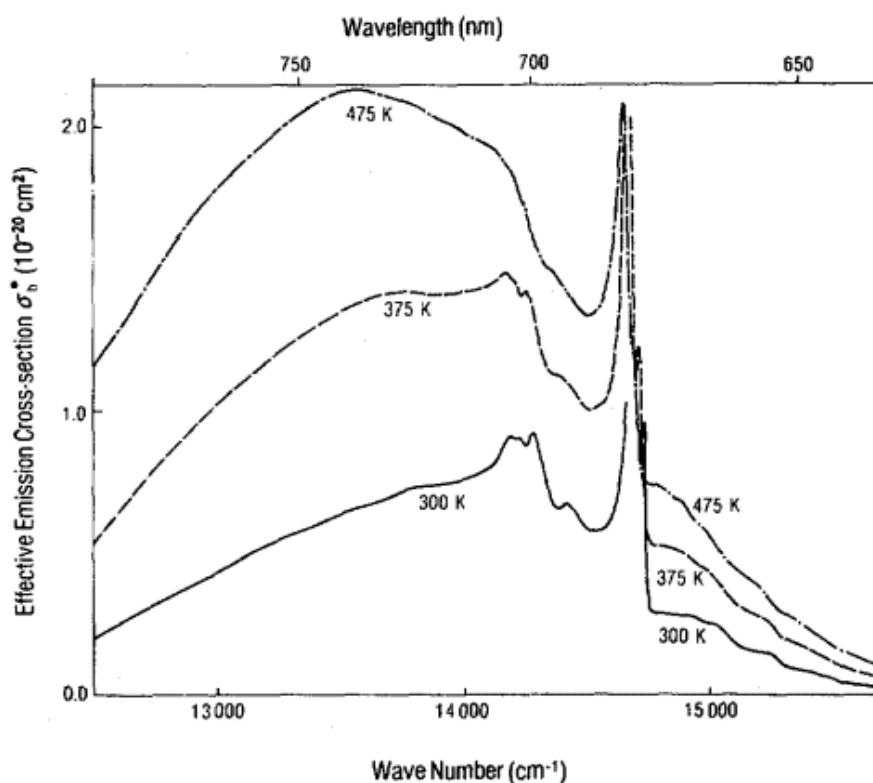


圖 4.10、亞歷山大雷射的有效放射截面積與溫度和波長的關係圖。

由 Rapaport 等人所做的實驗測量[16]，Nd:GSGG 與 Nd:YAG 雷射放射截面積隨溫度的變化是可以用線性表示。由 Michael Bass 等人使用實驗測量與數值公式推算[15]，Nd:GSGG 與 Nd:YAG 雷射放射截面積隨溫度的變化也是可以用線性表示。而由圖 4.10 可以觀察到亞歷山大雷射的放射截面積隨溫度變化也是可以用線性表示[18]。回到我模擬分析的 Nd:YAG-Cr:YAG 的雙雷射變溫系統，所以我也決定假設 Cr:YAG 可飽和吸收體當成雷射晶體的時候，它的放射截面積隨溫度的變化是線性的。因為 Cr:YAG 晶體室溫時候的放射截面積是 $\sigma_g = 3.3 \times 10^{-19} \text{ cm}^2$ [17]，把整個 Nd:YAG-Cr:YAG 的雙雷射系統做溫度從 243 K 增加到 423 K。Nd:YAG 的放射截面積隨溫度變化是 $d\sigma_g/dT = -3.72 \times 10^{-22} \text{ cm}^2/\text{K}$ ，Nd:GSGG 的放射截面積隨溫度變化是 $d\sigma_g/dT = -3.32 \times 10^{-22} \text{ cm}^2/\text{K}$ [15]，也就是每升高 1 K 則 Nd:YAG 的放射截面積就減少 $3.72 \times 10^{-22} \text{ cm}^2$ 。Cr:YAG 的放射截面積隨溫度的變化我假設是 $d\sigma_g/dT = -3.5 \times 10^{-22} \text{ cm}^2/\text{K}$ ，也就在 243 K 增加到 423 K 的範圍內，每升高 1K 則 Cr:YAG 的放射截面積就減少 $3.5 \times 10^{-22} \text{ cm}^2$ 。這個數據我假設的原因由來是，從 Nd:YAG 在室溫時的放射截面積大約是 $2.7 \times 10^{-19} \text{ cm}^2 \sim 9.0 \times 10^{-19} \text{ cm}^2$ [19–22] 與每 1K 變化的放射截面積的比值約 725~2419 倍。Nd:GSGG 在室溫時的放射截面積大約是 $1.3 \times 10^{-19} \text{ cm}^2 \sim 4.2 \times 10^{-19} \text{ cm}^2$ [16,22] 與每 1 K 變化的放射截面積的比值約 391~1265 倍。亞歷山大雷射[18]在室溫時的放射截面積是 7×10^{-21}

cm²。由圖 4.10 做線性推算，亞歷山大雷射的放射截面積隨溫度變化是 $d\sigma_g/dT = -0.74 \times 10^{-22} \text{ cm}^2/\text{K}$ ，與每 1 K 變化的放射截面積的比值約 9459 倍。測試了這幾個固態晶體，結果每 1 K 變化的放射截面積的比值有可能從 100 至 10^5 倍。

所以我保守的假設在從 243 K 增加到 423 K 的範圍，Cr:YAG 的放射截面積隨溫度的變化我假設是 $d\sigma_e/dT = -3.5 \times 10^{-22} \text{ cm}^2/\text{K}$ 。原因是 Cr:YAG 的放射截面積在幾個 10^{-19} cm^2 的範圍。

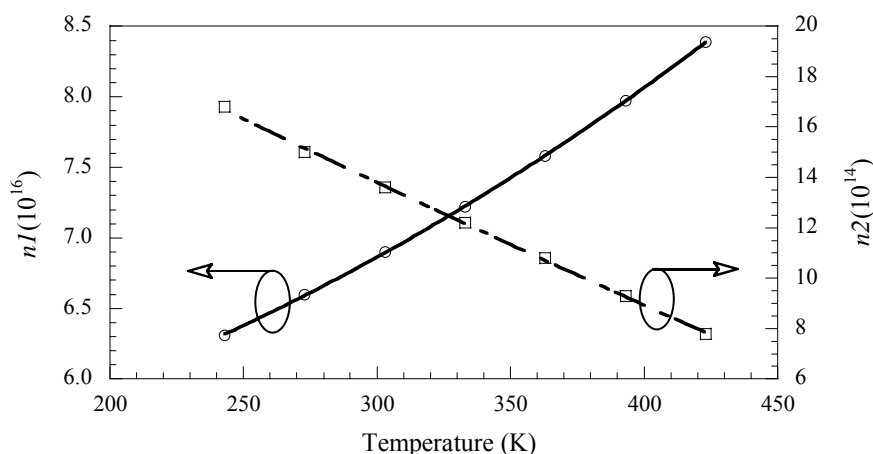


圖4.11、Nd:YAG雷射光之峰值光子數 $n1$ 與Cr:YAG雷射光之峰值光子數 $n2$ 對溫度的關係圖。

圖4.11是變化溫度243 K增加到423 K的範圍，Nd:YAG雷射光之峰值光子數 $n1$ 隨這溫度變大而上升，這與Michael Bass等人所做的研究趨勢相同。一般的固態雷射晶體，雷射的波長與增益頻譜在變化溫度的情況下，當溫度越高，波型會越趨於矮胖，也就是增益隨溫度變

高而越差[23]。然後增益又與雷射的放射截面積成正比[24]，所以溫度越高，雷射放射截面積會越小。以被動Q開關雷射系統來說，如果可飽和吸收體的吸收截面積比雷射晶體的放射截面積的比例越大，就越能產生能量高且脈衝窄的雷射脈衝。所以，當溫度越高雷射的放射截面積就會越小，自然被動Q開關雷射的脈衝的能量就會越大。不過，Michael Bass等人並沒有對Cr:YAG可飽和吸收體做第二個雷射晶體的研究。從我模擬的圖4.11中可以看到Cr:YAG第一個雷射脈衝最高光子數隨著溫度的上升而下降。由圖4.12也可以看到Nd:YAG雷射光之第一個雷射脈衝的能量也是隨著溫度增加而變大的。這與Rapaport與Xiao等人的實驗結果和Michael Bass等人的數值公式推算趨勢相同且數值也相近。同時由我的模擬還可以看出Cr:YAG第一個雷射脈衝的能量隨著溫度的上升而下降。

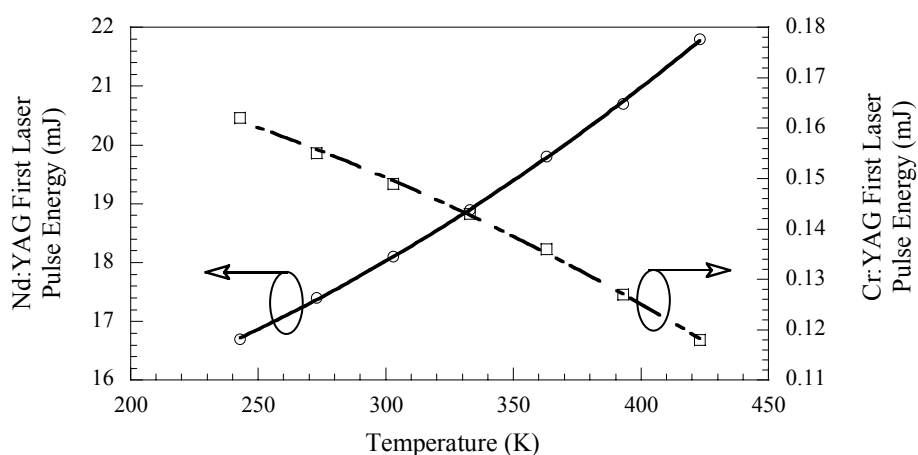


圖4.12、Nd:YAG雷射光之第一個雷射脈衝的能量與Cr:YAG雷射光之第一個雷射脈衝的能量對溫度的關係圖。

變化溫度似乎對Nd:YAG雷射第一個脈衝與Cr:YAG雷射光之第一個雷射脈衝出現的時間差沒有太大的影響。這是因為因為可飽和吸收體Cr:YAG飽和的情況，是基態電子吸收Nd:YAG雷射晶體發出的波長的光子，但當Nd:YAG雷射晶體放射出雷射脈衝後，這個平衡狀態就被打破了。Nd:YAG雷射晶體的居量反轉數快速減少，意味這Nd:YAG雷射晶體的雷射上能階的電子，大量的躍遷回到基態能階放出雷射光。Nd:YAG雷射晶體的基態電子吸收激發光源的光子，累積居量反轉數的速率遠大於放出光子的速率。因此，Cr:YAG可飽和吸收體自然沒有Nd:YAG雷射晶體放出的光子可以吸收。所以，Cr:YAG可飽和吸收體的基態電子躍遷到激態能階的速率與雷射上能階的電子受激放射到基態的速率變的無法達到平衡。

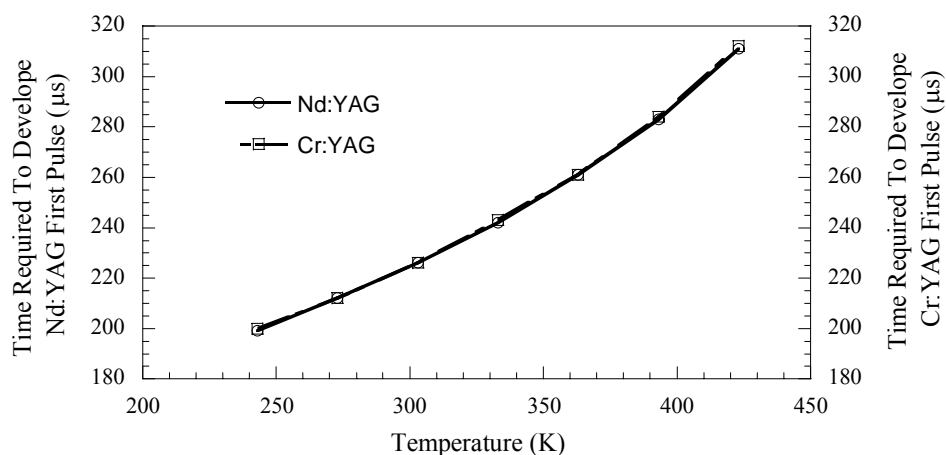


圖4.13、Nd:YAG雷射光之第一個雷射脈衝的出現時間與Cr:YAG雷射光之第一個雷射脈衝的出現時間對溫度的關係圖。

然後，以雙雷射系統的角度來看，Cr:YAG晶體除了當可飽和吸收體外也當雷射晶體。Cr:YAG雷射晶體的居量反轉數正好是 $N_{a0} - N_a$ 。所以，在Nd:YAG雷射晶體放出雷射脈衝後，Cr:YAG晶體當成可飽和吸收體的基態粒子數也會快速增加(這也是Cr:YAG可飽和吸收體切換回到不飽和的原因)，Cr:YAG晶體當成雷射晶體的居量反轉數 N_{a-up} 快速減少，也就是Cr:YAG放出雷射脈衝。由此看來，Cr:YAG雷射的雷射脈衝一定是跟隨在Nd:YAG雷射晶體放出雷射脈衝之後大約相同的時間出現。這個現象我們可以從圖4.13與圖4.14看見。

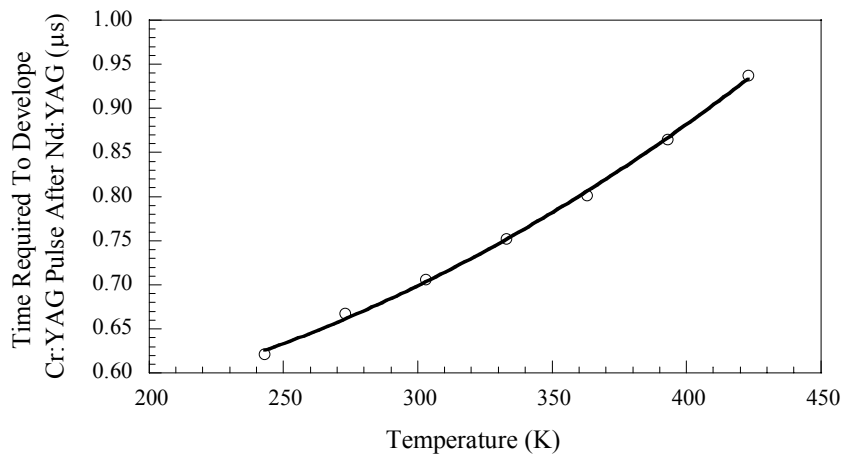


圖4.14、Cr:YAG雷射光跟隨在Nd:YAG雷射光之後出現所花的時間。

參考文獻

- [1] K. Spariosu, W. Chen, R. Stultz, and M. Birnbaum, “Dual Q switching and laser action at 1.06 and 1.44 μm in a $\text{Nd}^{3+}:\text{YAG}-\text{Cr}^{4+}:\text{YAG}$ oscillator at 300 K,” *Opt. Lett.*, vol. 18, pp. 814–816, 1993.
- [2] H. M. Chen, and Y. K. Kuo, “Nd:YAG-Cr:YAG 共振腔中 Cr:YAG 被動 Q 開關與雷射效應雙象性之探討,” (台灣光電科技研討會), 2001.
- [3] H. Eilers, W. M. Dennis, W. M. Yen, S. Kuck, K. Peterman, G. Huber, and W. Jia, *IEEE J. Quantum Electron.*, vol. 29, pp. 2508–2512, 1993.
- [4] K. Spariosu, R. D. Stultz, and M. Birnbaum, “Er: $\text{Ca}_5(\text{PO}_4)_3\text{F}$ saturable-absorber Q switch for the Er:glass laser at 1.53 μm ,” *Appl. Phys. Lett.*, vol. 62, pp. 2763–2765, 1993.
- [5] M. Bode, S. Spiekermann, C. Fallnich, H. Welling, and I. Freitag, “Ultraviolet Single-Frequency pulse with 110 mW average power using frequency-converted passively Q-switched miniature Nd:YAG ring lasers,” *Appl. Phys. Lett.*, vol. 73, pp. 714–716, 1998.
- [6] I. Shoji, S. Kurimura, Y. Sato, and T. Taira, “Optical properties and laser characteristics of highly Nd^{3+} doped $\text{Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$ ceramics,” *Appl. Phys. Lett.* vol. 77, pp. 939–941, 2000.
- [7] L. F. Johnson, J. E. Geusic and L. G. Van Uitert, “Coherent

- oscillations from Tm^{3+} , Ho^{3+} , Yb^{3+} and Er^{3+} ions in Yttrium Aluminum Garnet, ” *Appl. Phys. Lett.* ,vol. 7, pp. 127–129, 1965.
- [8] S. R. Bowman, M. J. Winings, Raymond C. Y. Auyeung, J. E. Tucker, Stuart K. Searles and Barry J. Feldman, “Laser and spectral properties of Cr,Tm,Ho:YAG at 2.1 μm , ” *IEEE J. Quantum Electron.*, vol. 27, pp. 2142–2149, 1991.
- [9] P. M. W. French, N. H. Rizvi, and J. R. Taylor, ”Continuous-wave mode-locked Cr^{4+} -YAG laser,” *Opt. Lett.*, Vol. 18, pp. 39–41, 1993.
- [10] P. Kozodoy, T. Strand, Y. Akulova, G. Fish, C. Schow, P. Koh, Z. Bian, J. Christofferson, and A. Shakouri, “Thermal effects in monolithically integrated tunable laser transmitters,” *IEEE Semiconductor Thermal Measurement and Management Symposium Twentieth Annual Conference*, pp. 177–183, 2004.
- [11] X. Li, and W. P. Huang, “Simulation of DFB semiconductor lasers incorporating thermal effects,” *IEEE J. Quantum Electron.*, vol. 31, pp. 1848–1855, 1995.
- [12] W. R. Smith, J. R. King, and B. Tuck, “Mathematical modelling of thermal effects in semiconductor laser operation,” *IEE Proceedings of Optoelectronics*, vol. 144, pp. 389–396, 1997.
- [13] H. Garrab, M. A. Kallala, K. Besbes, R. Tourki, “Reduced bond graph modeling of semiconductor device thermal effects,” *ICM Microelectronics Proceedings of the Tenth International Conference*, pp. 135–140, 1998.

- [14] J. Rodriguez-Tellez, T. Fernandez, A. Mediavilla, and A. Tazon, "Characterization of thermal and frequency-dispersion effects in GaAs MESFET devices," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 49, pp. 1352–1355, 2001.
- [15] B. Michael, "The temperature dependence of Nd³⁺ doped solid-state lasers," *IEEE J. Quantum Electron.*, vol. 39, pp. 741–748, 2003.
- [16] A. Rapaport, S. Zhao, G. Xiao, A. Howard, and M. Bass, "Temperature dependence of the 1.06-micron stimulated emission cross-section of neodymium in YAG and in chromium co-doped GSGG," *Appl. Opt.*, vol. 41, pp. 7052–7057, 2002.
- [17] J. C. Diettrich, I. T. McKinnie, and D. M. Warrington, "The influence of active ion concentration and crystal parameters on pulsed Cr:YAG laser performance," *Opt. Commun.*, pp. 133–140, 1999.
- [18] J. C. Walling, O. G. Peterson, H. P. Jenssen, R. C. Morris, and E. W. O'dell, "Tunable Alexandrite Lasers," *IEEE J. Quantum Electron.*, vol. QE-16, NO. 12, pp. 1302–1315, 1980.
- [19] M. Sekita, Y. Miyazawa, S. Morita, H. Sekiwa, and Y. Sato, "Strong Tb³⁺ emission of TbAlO₃ at room temperature," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 65, pp. 2380–2382, 1994.
- [20] J. J. Degnan, "Optimization of passively Q-switched lasers," *IEEE J. Quantum Electron.*, vol. 31, pp. 1890–1901, 1995.
- B. Aull, and H. Jenssen, "Vibronic interactions in Nd:YAG

- resulting in nonreciprocity of absorption and stimulated emission cross sections,” *IEEE J. Quantum Electron.*, vol. 18, pp. 925–930, 1982.
- [21] E. Reed, “A flashlamp-pumped, Q-switched Cr:Nd:GSGG laser,” *IEEE J. Quantum Electron.*, vol. 21, pp. 1625–1629, 1985.
- [22] R. Scheps, Efficient Cr,Nd:Gd₃Sc₂Ga₃O₁₂ laser at 1.06 μm pumped by visible GaInP/AlGaInP laser diodes,” *Appl. Phys. Lett.*, vol. 59, pp. 1287–1289, 1991.
- [23] S. F. Tang, “The design and Fabricate for Infrared Quantum Dot Light Emitting Diode,” *Knowledge Bridge*, pp. 1–2, 2001.
- [24] W. Koechner, *Solid-State Laser Engineering*, (Fourth Extensively Revised and Updated Edition), 1996.

第五章 結論

固態雷射包含了雷射的重要原理，本篇論文敘述了固態雷射與可飽和吸收體的重要物理特性。從數值模擬的角度，分別使用三個聯立耦合方程式與四個聯立耦合方程式來分析可飽和吸收體的脈衝雷射系統。雖然固態雷射與現今的半導體雷射與高亮度發光二極體比起來，是個作承先啟後的不錯角色。不過，本篇論文所注重的是完整的描述這可飽和吸收體被動 Q 開關脈衝雷射。

雙雷射系統是一個有趣的現象，它的物理也令人玩味。只是研究它的人員並不多。從使用四個聯立耦合方程式來分析是一個新的想法。我承接了陳鴻銘學長的研究，把研究的結果呈現在論文中。變化溫度的雙雷射系統其實可以看到更多好玩的現象。雖然固態雷射的溫度變化研究也不像半導體來的迫切解決。因為尺度上的問題讓被動 Q 開關脈衝雷射可以有比較好的散熱系統，被動 Q 開關脈衝雷射的量子效應也比較不明顯。不過，我的模擬分析還是可以當作後人做實驗的比較。

不管是半導體雷射也好，固態雷射也好。在光電的領域上，這些雷射都扮演了重要的角色。在新光源的開發、通訊便利，以及各種快速雷射研究。希望本論文有助於對光電領域的認識，同時，在數值模擬的方面，本論文也可以當做一個不錯的參考。

附錄 A Matlab 程式

A-1 紅寶石使用可飽和吸收體 Dy:CaF₂ 的被動 Q 開關脈衝雷射模擬程式的主程式。

```
global rp
global Na0
global R
global L

Lth=694e-9;
sg=2.5e-24;
sa=1.2e-22;
Lc=0.27;
beta=0.75;
h0=6.6252e-34;
c=3e8;
ag=pi.*(0.001).^2;
aa=ag;
tr=(2.*Lc)./c;
kg=2.*sg./tr./ag;
ka=2.*sa./tr./aa;
v=c./Lth;
tg=3e-3;
ta = 150e-6;

today=0;

for count00=1:1:1
    t=count00.*9e-4;
    if today==1
        break
    elseif today==0
for count01=1:1:1
    rp=count01.*1.2e21;
    if today==1
        break
    elseif today==0
for count03=1:1:1
```

```

n=6000.*count03;
ng=6000.*count03;

if today==1
    break
elseif today==0
for count06=1:1:1
    if today == 1
        break
    elseif today==0
for count04=1:1:3
    if count04==1
        R=0.78;
    elseif count04==2
        R=0.84;
    elseif count04==3
        R=0.89;
    else
        fprintf('反射鏡的反射率這裡有問題')
    end

    delta=1-R.*(1-L);
    tc=tr./delta;
    rc=1./tc;

for count05=1:1:2
    if count05==1
        Na0=(15/8).*(2.06e15);
        na=Na0;
        L=0.1;
        delta=1-R.*(1-L);
        tc=tr./delta;
        rc=1./tc;
    elseif count05==2
        Na0=(3.6e15).*count06;
        na=Na0;
        L=0.6;
        delta=1-R.*(1-L);
        tc=tr./delta;
        rc=1./tc;
    else

```

```

        fprintf('count05 is error\n\n')
    end

    % tin=0:0.00005.*t:t;
    [tout,yout]=ode45('Ruby_DyCaF2',[0 t],[n ng na]);
    % subplot(3,1,1),plot(tout(:,1),yout(:,1))
    % subplot(3,1,2),plot(tout(:,1),yout(:,2))
    % subplot(3,1,3),plot(tout(:,1),yout(:,3))
    loss=(ka.*yout(:,3)+beta.*ka.*(na-yout(:,3))+rc)./kg;
    [p,j]=max(yout(:,1));
    if p>1e13
        [p,m]=max(yout(1:j-300,1));
        if p>1e13
            [p,k]=max(yout(1:m-300,1));
            while p>1e13
                j=m;
                m=k;
                [p,k]=max(yout(1:m-300,1));
            end
            [p,k]=max(yout(m+300:j+300,1));
            while p>1e13
                j=k+m+300-1;
                [p,k]=max(yout(m+300:j-300,1));
            end
        else
            m=j;
            [M,N]=size(yout);
            [p,k]=max(yout(m+300:M-1,1));
            while p>1e13
                j=k+m+300-1;
                [p,k]=max(yout(m+300:j-300,1));
            end
        end
        end
        %subplot(3,1,3),plot(tout(m-250:m+250,1),yout(m-250:m+250,1))
        Y=yout(m-1,1);
        T1=tout(m-1,1);
    dT=tout(j-1,1)-tout(m-1,1);
        z1=tout(:,1);
        z2=yout(:,1);
        z3=yout(:,2);

```

```

z4=yout(:,3);
z5=loss(:,1);
z01=[tout(:,1),yout(:,1),yout(:,2),yout(:,3),loss(:,1)];
z02=[tout(m-500:m+500,1),yout(m-500:m+500,1),
      yout(m-500:m+500,2),yout(m-500:m+500,3),
      loss(m-500:m+500,1)];

```

```

save face01.txt z01 -ascii
save face02.txt z02 -ascii
save face1.txt z1 -ascii
save face2.txt z2 -ascii
save face3.txt z3 -ascii
save face4.txt z4 -ascii
save face5.txt z5 -ascii

```

```

y=Y/2;
q=m-10;
while yout(q-1,1)>y
    q=q-10;
end
q=q+1;
while yout(q-1,1)<y
    q=q+1;
end
if yout(q-1,1)-y<y-yout(q-2,1)
    h=q;
else
    h=q-1;
end
q=m+10;
while yout(q-1,1)>y
    q=q+10;
end
q=q-1;
while yout(q-1,1)<y
    q=q-1;
end
if yout(q-1,1)-y<y-yout(q,1)
    g=q;
else
    g=q+1;
end

```

```

end
dw=tout(g-1,1)-tout(h-1,1);
t1=5.*tout(h-1)-4.*tout(m-1);
t2=5.*tout(g-1)-4.*tout(m-1);
s=0;
i=m;
while tout(i-2)>t1
    af=(tout(i-1,1)-tout(i-2,1)).*yout(i-1,1);
    s=af+s;
    i=i-1;
end
i=m;

while tout(i-1)<t2
    af=(tout(i,1)-tout(i-1,1)).*yout(i,1);
    s=af+s;
    i=i+1;
end

E=s.*h0.*v.*(1-R).*1000./tr;

a=[Y T1 dT dw E Lth sg];
save face.txt a -ascii
end

if count05==1 & count04==1
    E78_15=E;
    W78_15=dw;
elseif count05==1 & count04==2
    E84_15=E;
    W84_15=dw;
elseif count05==1 & count04==3
    E89_15=E;
    W89_15=dw;
elseif count05==2 & count04==1
    E78_8=E;
    W78_8=dw;
elseif count05==2 & count04==2
    E84_8=E;
    W84_8=dw;
elseif count05==2 & count04==3

```

```

        E89_8=E;
        W89_8=dw;
    else
        fprintf('E and W 有錯誤')
    end

end      % count05 的 end

end      % count04 的 end

A15=[E78_15 W78_15 E84_15 W84_15 E89_15 W89_15];
A8=[E78_8 W78_8 E84_8 W84_8 E89_8 W89_8];

a15078_up=(1.1).*(5.7);
a15078_down=(0.9).*(5.7);
a15084_up=(1.1).*(4.8);
a15084_down=(0.9).*(4.8);
a15089_up=(1.1).*(3.8);
a15089_down=(0.9).*(3.8);
b15_up=(1.1).*(100e-9);
b15_down=(0.9).*(100e-9);

a8078_up=(1.1).*(2.6);           a8078_down=(0.9).*(2.6);
a8084_up=(1.1).*(2.2);
a8084_down=(0.9).*(2.2);
a8089_up=(1.1).*(1.8);
a8089_down=(0.9).*(1.8);
b8_up=(1.1).*(150e-9);
b8_down=(0.9).*(150e-9);

smile15=0;
smile08=0;
save run15.txt A15 -ascii
save run08.txt A8 -ascii

if((E78_15<=a15078_up) & (E78_15>=a15078_down))
    if((E84_15<=a15084_up) & (E84_15>=a15084_down))
        if((E89_15<=a15089_up) & (E89_15>=a15089_down))
            if((W78_15<=b15_up) & (W78_15>=b15_down))
                if((W84_15<=b15_up) & (W84_15>=b15_down))

```

```

        if((W89_15<=b15_up) & (W89_15>=b15_down))
            save miller015.txt A15 -ascii
fprintf('QQ 得到一組厚度 15mm 合理數據\n\n')
        % subplot(3,1,1),plot(tout(:,1),yout(:,1))
        % subplot(3,1,2),plot(tout(:,1),yout(:,2))
        % subplot(3,1,3),plot(tout(:,1),yout(:,3))
        % subplot(3,1,3),plot(tout(m-250:m+250,1)
            ,yout(m-250:m+250,1))
        a15=[n ng rp t L R Na0 Y T1 dT Lth sg];
            save face15.txt a15 -ascii
            smile15=smile15+1;
            % break
else
            fprintf('XX 這組數據不符合反射率 89 厚度
                15mm 的半高全寬的誤差 \n\n')
            % fprintf('反射率 89% \n\n')
            % break
            end
        else
            fprintf('XX 這組數據不符合反射率 84 厚度 15mm 的
                半高全寬的誤差 \n\n')
            % fprintf('反射率 84% \n\n')
            % break
            end
        else
            fprintf('XX 這組數據不符合反射率 78 厚度 15mm 的半高全
                寬的誤差 \n\n')
            % fprintf('反射率 78% \n\n')
            % break
            end
        else
            fprintf('XX 這組數據不符合反射率 89 厚度 15mm 的能量的誤差
                \n\n')
            % fprintf('反射率 89% \n\n')
            % break
            end
else

```



```

        fprintf('XX 這組數據不符合反射率 84 厚度 15mm 的能量的誤差 \n\n')
        % fprintf('反射率 84% \n\n')
        % break
    end
else
fprintf('XX 這組數據不符合反射率 78 厚度 15mm 的能量的誤差 \n\n')
% fprintf('反射率 78% \n\n')
% break
end

if ((E78_8<=a8078_up) & (E78_8>=a8078_down))
    if((E84_8<=a8084_up) & (E84_8>=a8084_down))
        if((E89_8<=a8089_up) & (E89_8>=a8089_down))
            if((W78_8<=b8_up) & (W78_8>=b8_down))
                if((W84_8<=b8_up) & (W84_8>=b8_down))
                    if((W89_8<=b8_up) & (W89_8>=b8_down))
                        save miller08.txt A8 -ascii
                        fprintf('QQ 得到一組厚度 8mm 合理數據
\n\n')
                        a8=[n ng rp t L R Na0 Y T1 dT Lth sg];
                        save face08.txt a8 -ascii
                        smile08=smile08+1;
                        break
                    else
                        fprintf('XX 這組數據不符合反射率 89 厚度
8mm 的半高全寬的誤差 \n\n')
                        % fprintf('  反射率 89% \n\n')
                        % break
                    end
                end
            else
                fprintf('XX 這組數據不符合反射率 84 厚度 8mm 的半
高全寬的誤差 \n\n')
                % fprintf('  反射率 84% \n\n')
                % break
            end
        end
    else
        fprintf('XX 這組數據不符合反射率 78 厚度 8mm 的半高全寬
的誤差 \n\n')
        % fprintf('  反射率 78% \n\n')
    end
end

```

```

                % break
            end

            else
                fprintf('XX 這組數據不符合反射率 89 厚度 8mm 的能量的誤差
                \n\n')
                % fprintf('  反射率 89% \n\n')
                % break
            end

            else
                fprintf('XX 這組數據不符合反射率 84 厚度 8mm 的能量的誤差 \n\n')
                % fprintf('  反射率 84% \n\n')
                % break
            end

            else
                fprintf('XX 這組數據不符合反射率 78 厚度 8mm 的能量的誤差 \n\n')
                % fprintf('  反射率 78% \n\n')
                % break
            end

            end

            if smile08==1 & smile15==1
                fprintf('QQ 得到一組厚度 8mm 與 15mm 都合理的數據\n\n')
                a158=[n ng rp t L R Na0 Y T1 dT dw E Lth sg];
                save sumday.txt a158 -ascii
                save sumday08.txt A8 -ascii
                save sumday15.txt A15 -ascii
                subplot(4,1,1),plot(tout(:,1),yout(:,1))
                subplot(4,1,2),plot(tout(:,1),yout(:,2))
                subplot(4,1,3),plot(tout(:,1),yout(:,3))
                subplot(4,1,4),plot(tout(m-250:m+250,1),yout(m-250:m+250,1))
                today=today+1;
                break
            end

            end

            end

            end
end
end

```

```
end
    %end
%end
    end
end
    end
end
```

```
fprintf(' 程式已經完成運算 ')
```

```
%clear Lth sg sa r Lc beta h0 c ag aa tr delta tc rc kg ka v j i af a A
```

```
clear global rp R Na0 L
```

A-2 紅寶石使用可飽和吸收體 Dy:CaF₂ 的被動 Q 開關脈衝雷射模擬程式的副程式。

```
function popu=Ruby_DyCaF2(t,n)
```

```
popu=zeros(3,1);
```

```
global rp
```

```
global Na0
```

```
global R
```

```
global L
```

```
sg=2.5e-24;
```

```
sa=1.2e-22;
```

```
c=3e8;
```

```
Lc=0.27;
```

```
ag=pi.*(0.001).^2;
```

```
aa=ag;
```

```
tr=2.*Lc./c;
```

```
delta=1-R.*(1-L);
```

```
tc=tr./delta;
```

```
rc=1./tc;
```

```
tg=3e-3;
```

```
ta=150e-6;
```

$\beta = 0.75;$

$rg = 1./tg;$

$ra = 1./ta;$

$kg = 2.*sg./tr./ag;$

$ka = 2.*sa./tr./aa;$

$popu(1) = (kg.*n(2) - ka.*n(3) - \beta.*ka.*(Na0 - n(3)) - rc). *n(1);$

$popu(2) = rp - rg.*n(2) - 2.*kg.*n(2). *n(1);$

$popu(3) = ra.*(Na0 - n(3)) - ka.*n(3). *n(1);$